

Metode Hybrid Steffensen untuk Menentukan Hampiran Akar Persamaan Tak Linier

Dela Iswana, Meira Parma Dewi

¹ Departemen Matematika, Universitas Negeri Padang

Article Info

Article history:

Received August 7, 2025

Revised August 21, 2025

Accepted January 17, 2026

Keywords:

Hybrid Steffensen
Nonlinear equations
Root approximation

Kata Kunci:

Hybrid Steffensen
Persamaan tak linier
Hampiran akar

ABSTRACT

The Hybrid Steffensen Method is one of the numerical methods used to approximate the roots of nonlinear equations. The objective of this study is to construct the formula of the Hybrid Steffensen Method, formulate its algorithm, and analyze its order of convergence. Furthermore, this research compares the performance of the Hybrid Steffensen Method with the standard Steffensen Method on several test functions. The method employed in this study is a literature review, which involves collecting theories from various books and relevant sources. The results of this study provide a formula for the Hybrid Steffensen Method along with its algorithm, and it is proven to have quadratic order of convergence. In addition, this method demonstrates better performance for functions with certain characteristics compared to the standard Steffensen Method.

ABSTRAK

Metode Hybrid Steffensen merupakan salah satu metode numerik untuk menentukan hampiran akar persamaan tak linier. Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk menyusun formula metode Hybrid Steffensen, merumuskan algoritmanya, serta menganalisis orde konvergensinya. Penelitian ini juga membandingkan kinerja metode Hybrid Steffensen dengan metode Steffensen biasa pada beberapa fungsi uji. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur yaitu, mengumpulkan teori-teori dari berbagai buku dan sumber yang relevan. Hasil penelitian ini diperoleh sebuah formula metode Hybrid Steffensen beserta algoritmanya, serta terbukti memiliki orde konvergensi kuadratik. Selain itu, metode ini menunjukkan kinerja yang lebih baik untuk fungsi dengan karakteristik tertentu dibandingkan metode Steffensen biasa.

This is an open access article under the [CC BY-SA](#) license.



Penulis Korespondensi:

Dela Iswana

Departemen Matematika, Universitas Negeri Padang,

Email: delaiswana02@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Berbagai permasalahan dalam bidang terapan, seperti fisika dan Teknik, seringkali dimodelkan ke dalam bentuk matematis untuk memudahkan proses analisis dan penyelesaian masalah [1]. Banyak fenomena nyata dimodelkan ke dalam bentuk matematis, yang kemudian dinyatakan dalam bentuk persamaan, baik linier maupun tak linier [2]. Penyelesaiannya dapat dilakukan secara analitik

maupun numerik. Metode analitik digunakan apabila bentuk persamaannya sederhana dan memungkinkan untuk diselesaikan secara eksak [3]. Namun, ketika persamaan berbentuk kompleks, pendekatan analitik menjadi sulit diterapkan sehingga dibutuhkan metode numerik [4].

Pendekatan numerik digunakan Ketika solusi eksak sulit diperoleh, dengan memanfaatkan proses iterasi untuk menghasilkan nilai pendekatan yang semakin mendekati akar [5]. Sejumlah metode iteratif telah diperkenalkan dalam literatur untuk menyelesaikan persamaan tak linear, mulai dari metode dengan jaminan konvergensi hingga metode dengan laju konvergensi yang lebih cepat [6]. Meskipun metode Bagi Dua dan Posisi Palsu selalu konvergen, keduanya memiliki laju konvergensi yang lambat [7].

Metode Newton-Raphson merupakan metode terbuka dengan laju konvergensi kuadratik yang cepat dan efisien jika tebakan awal cukup dekat dengan akar sebenarnya [8]. Namun, metode ini membutuhkan turunan pertama dari fungsi, yang dalam banyak kasus sulit atau bahkan tidak dapat ditentukan. Untuk mengatasi kekurangan ini, dikembangkan metode bebas turunan seperti Metode Steffensen, yang menggantikan turunan pertama dengan pendekatan selisih hingga tanpa mengurangi orde konvergensi [9].

Metode Steffensen memiliki keunggulan karena tidak memerlukan turunan, namun pada beberapa fungsi tertentu kecepatannya masih kalah dibandingkan metode Newton [10]. Oleh karena itu, berbagai peneliti melakukan modifikasi untuk meningkatkan kinerjanya. Salah satu pendekatan yang menarik adalah Metode Hybrid Steffensen, yang menggabungkan pendekatan selisih maju dan selisih mundur melalui parameter pembobot w [11].

Kombinasi ini memungkinkan tercapainya keseimbangan antara stabilitas numerik dari pendekatan selisih mundur dan efisiensi konvergensi dari pendekatan selisih maju. Pada penelitian ini digunakan nilai $w = 0,5$ agar menghasilkan rata-rata konvergensi dari dua pendekatan. Metode Hybrid Steffensen terbukti secara numerik mampu memberikan hasil yang lebih cepat dan stabil dibandingkan metode Steffensen.

Berdasarkan uraian tersebut, tujuan penelitian ini adalah untuk menelaah proses pembentukan Metode Hybrid Steffensen dalam menentukan akar persamaan tak linier, menyusun algoritmanya, serta menganalisis orde kekonvergenannya. Mengevaluasi efektivitas metode Hybrid Steffensen dalam menyelesaikan fungsi-fungsi tak linier kompleks dan membandingkan performanya dengan metode Steffensen biasa juga menjadi tujuan utama dari penelitian ini [12].

2. METODE

Penelitian ini dilakukan melalui pendekatan studi kepustakaan dengan menelaah berbagai referensi yang berkaitan dengan metode iteratif bebas turunan. Pendekatan ini digunakan untuk memperoleh pemahaman teoritis yang mendalam mengenai pembentukan dan sifat konvergensi metode Hybrid Steffensen. Tahapan penyelesaian dilakukan dengan mengkaji prinsip kerja metode Hybrid Steffensen, menganalisis laju kekonvergenan metode tersebut, serta merancang algoritma yang selanjutnya diimplementasikan ke dalam program komputer. Berdasarkan hasil penerapan algoritma tersebut, kesimpulan kemudian ditarik dengan mengacu pada teori yang telah dipelajari.

Objek dari penelitian ini adalah persamaan tak linier yang secara struktural mengandung gabungan komponen osilasi, eksponensial, dan linier. Persamaan tersebut dipilih karena mewakili bentuk umum permasalahan yang kerap ditemukan dalam bidang terapan [13]. Data yang digunakan berupa hasil iterasi numerik terhadap persamaan tersebut, yang diperoleh dari implementasi algoritma.

Algoritma dari metode Hybrid Steffensen dirancang dengan memodifikasi pendekatan Steffensen biasa, yakni tidak hanya menggunakan selisih maju dalam menghitung hampiran akar, melainkan juga mengombinasikannya dengan selisih mundur agar diperoleh kestabilan yang dalam proses iterasi [14]. Perubahan ini membuat metode lebih tahan terhadap kasus di mana perubahan fungsi di sekitar titik awal sangat ekstrem atau penyebut dalam rumus iterasi mendekati nol. Prosedur iteratif dikembangkan untuk menghitung pendekatan akar hingga toleransi kesalahan relatif tertentu tercapai atau hingga jumlah maksimum iterasi terlewati [15].

Untuk mengimplementasikan algoritma Hybrid Steffensen, validitas kode diverifikasi terlebih dahulu dengan mengujikan fungsi sederhana yang memiliki solusi eksak. Setelah terverifikasi,

dilakukan pengujian terhadap beberapa fungsi uji tak linier yang diambil dari sumber literatur, termasuk fungsi yang diketahui sulit dikonvergensi menggunakan metode biasa. Hasil iterasi berupa nilai pendekatan akar, dan jumlah iterasi yang dibutuhkan.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini membahas bagaimana menentukan hampiran akar dari suatu persamaan tak linier melalui penerapan metode Hybrid Steffensen. Metode ini merupakan pengembangan dari metode Steffensen biasa yang termasuk ke dalam kategori metode iteratif tanpa turunan. Modifikasi dilakukan dengan menggabungkan pendekatan maju dan mundur dalam proses iterasi, dengan tujuan meningkatkan stabilitas dan mempercepat konvergensi terhadap akar.

3.1. Formula Metode Hybrid Steffensen

Pembentukan metode Hybrid Steffensen masih berangkat dari prinsip yang sama dengan metode Steffensen, yaitu pendekatan selisih beda hingga, namun dilakukan modifikasi pada skema pendekatannya.

Formula iterasi metode Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1)$$

Untuk selisih maju, diperoleh:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} \quad (2)$$

Sedangkan untuk selisih mundur, diperoleh:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n) - f(x_n - f(x_n))} \quad (3)$$

Selanjutnya gabungkan dua pendekatan di atas yaitu selisih maju dan selisih mundur dengan menggunakan suatu parameter pembobot yang disebut dengan w .

Secara matematis, penggabungan dua pendekatan iterasi dapat ditulis dalam bentuk:

$$x_{n+1} = w \cdot x_{n+1} + (1 - w) \cdot x_{n+1} \quad (4)$$

Agar lebih fokus membandingkan metode Steffensen dengan metode Hybrid Steffensen, dipilih parameter w nya yaitu 0,5 sehingga diperoleh rata rata dari dua pendekatan selisih hingga tadi yaitu selisih maju dan selisih mundur.

Substitusikan Persamaan (4), menjadi:

$$x_{n+1} = w \left(x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} \right) + (1 - w) \left(x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n) - f(x_n - f(x_n))} \right)$$

Substitusikan parameter $w = 0.5$, sehingga diperoleh:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} \right) + \frac{1}{2} \left(x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n) - f(x_n - f(x_n))} \right)$$

Sederhanakan Persamaan di atas sehingga:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left(\frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} + \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n) - f(x_n - f(x_n))} \right)$$

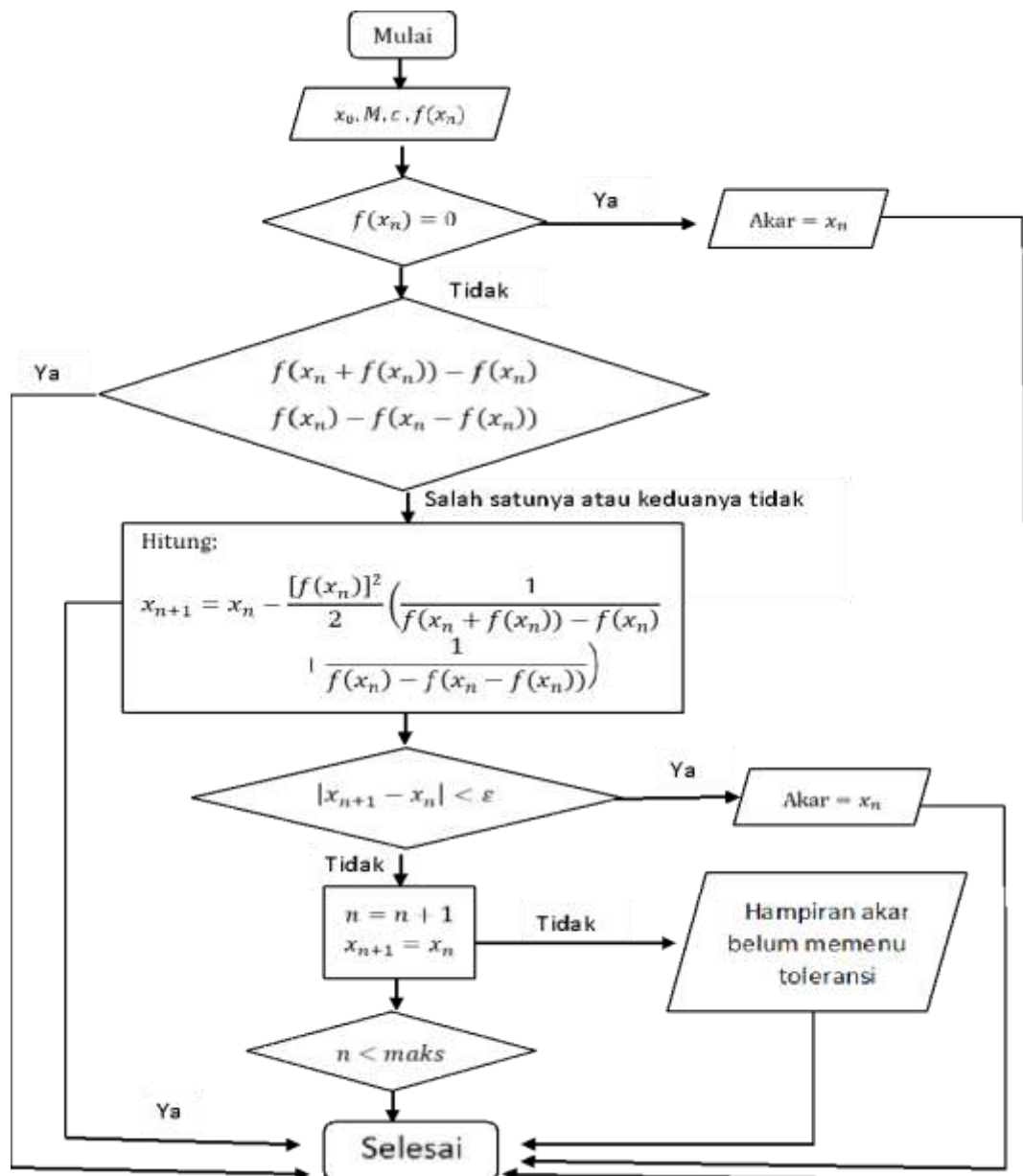
Dan kita memperoleh sebuah formula untuk iterasi metode Hybrid Steffensen, yaitu:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{2} \left(\frac{1}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} + \frac{1}{f(x_n) - f(x_n - f(x_n))} \right) \quad (5)$$

3.2. Algoritma Metode Hybrid Steffensen

3.2.1 Flowchart algoritma metode Hybrid Steffensen

Algoritma metode Hybrid Steffensen dalam menentukan hampiran akar persamaan tak linier dijabarkan melalui flowchart seperti Gambar 1.



Gambar 1. Algoritma metode Hybrid Steffensen

3.2.2 Prosedur algoritma metode Hybrid Steffensen

Tahapan iteratif dari algoritma metode Hybrid Steffensen dalam menentukan nilai hampiran akar persamaan tak linier dijelaskan melalui langkah-langkah sebagai berikut:

Masukan:

- Fungsi $f(x_n)$,
- Nilai awal x_0 ,
- Maksimal Iterasi M ,
- Batas galat maksimal ε ,

Proses:

- a. Masukkan Fungsi $f(x_n)$, Nilai awal x_0 , Iterasi Maksimal M , Batas galat maksimal ε
- b. Untuk setiap iterasi $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ Iterasi Maksimal M
 1. Hitung nilai fungsi $f(x_n)$, $f(x_n + f(x_n))$, dan $f(x_n - f(x_n))$
 2. Hitung iterasi berikutnya

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{2} \left(\frac{1}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} + \frac{1}{f(x_n) - f(x_n - f(x_n))} \right)$$
 3. Jika: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ atau $|f(x_{n+1})| < \varepsilon$, berarti x_{n+1} merupakan hampiran akar yang terbaik atau paling mendekati.
 4. Jika belum, maka perbarui $x_n \leftarrow x_{n+1}$

Keluaran: x_{n+1}

3.3. Orde Kekonvergenan Metode Hybrid Steffensen

Teorema 1. Orde konvergensi

Misalkan $f(x)$ adalah fungsi bernilai real yang mempunyai turunan pertama, kedua, ketiga dan seterusnya pada interval (a, b) . Jika $f(x)$ memiliki akar α pada interval (a, b) dan x_0 adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat dengan α , maka metode iterasi Hybrid Steffensen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{2} \left(\frac{1}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} + \frac{1}{f(x_n) - f(x_n - f(x_n))} \right)$$

memenuhi persamaan galat:

$$e_{n+1} = Ce_n^2 + O(e_n^3) \quad (6)$$

Dengan $e_n = x_n - \alpha$ dan $C = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$

Bukti: Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$. Asumsikan bahwa $f'(\alpha) \neq 0$ dan $x_n = \alpha + e_n$. Selanjutnya dengan menggunakan ekspansi deret Taylor kita hampiri bagian pembilang dan penyebutnya dari formula Hybrid Steffensen ini secara bertahap.

Langkah awalnya yaitu kita hampiri fungsi f disekitar α , diperoleh:

$$f(x_n) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)(x_n - \alpha)}{1!} + f''(\alpha) \frac{(x_n - \alpha)^2}{2!} + f'''(\alpha) \frac{(x_n - \alpha)^3}{3!} + \dots \quad (7)$$

Karena $f(\alpha) = 0$ dan $x_n = \alpha + e_n$, maka persamaan di atas dapat ditulis menjadi:

$$f(x_n) = f'(\alpha)e_n + \frac{f''(\alpha)e_n^2}{2} + \frac{f'''(\alpha)e_n^3}{6} + \dots \quad (8)$$

Karena Metode Hybrid Steffensen ini merupakan gabungan dari Steffensen dengan selisih beda hingga maju dan mundur, jadi kita sudah mendapatkan hasil ekspansi masing-masing bagian yang diperlukan yaitu bagian pembilang dan penyebutnya.

Kita tau bahwa formula iterasi dari metode Hybrid Steffensen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left(\frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} + \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n) - (f(x_n) - f(x_n))} \right) \quad (9)$$

Dengan:

$$\begin{aligned} [f(x_n)]^2 &= (f'(\alpha))^2 e_n^2 + (f'(\alpha)f''(\alpha))O(e_n^3) + O(e_n^4) \\ \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} &= \left(e_n - \frac{f''(\alpha)(1 + f'(\alpha))}{2f'(\alpha)} e_n^2 + O(e_n^3) \right) \\ \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n) - (f(x_n) - f(x_n))} &= \left(e_n + \frac{f''(\alpha)(f'(\alpha) - 1)}{2f'(\alpha)} e_n^2 + O(e_n^3) \right) \end{aligned}$$

Karena semua hasil telah diekspansi dan diselesaikan, selanjutnya kita akan mensubstitusikannya pada bagian formula iterasi Metode Hybrid Steffensen:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2} \left(\frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} + \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n) - (f(x_n) - f(x_n))} \right) \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2} \left(\left(e_n - \frac{f''(\alpha)(1 + f'(\alpha))}{2f'(\alpha)} e_n^2 + O(e_n^3) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(e_n + \frac{f''(\alpha)(f'(\alpha) - 1)}{2f'(\alpha)} e_n^2 + O(e_n^3) \right) \right) \\ &= x_n - \left(e_n + \frac{1}{2} \left(-\frac{f''(\alpha)(1 + f'(\alpha))}{2f'(\alpha)} + \frac{f''(\alpha)(f'(\alpha) - 1)}{2f'(\alpha)} \right) e_n^2 + O(e_n^3) \right) \\ &= x_n - \left(e_n + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right) \left(-(1 + f'(\alpha)) + (f'(\alpha) - 1) \right) e_n^2 + O(e_n^3) \right) \\ &= x_n - \left(e_n + \frac{f''(\alpha)}{4f'(\alpha)} \left(\frac{-(1 + f'(\alpha)) + (f'(\alpha) - 1)}{2} \right) e_n^2 + O(e_n^3) \right) \\ &= x_n - \left(e_n - \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} e_n^2 + O(e_n^3) \right) \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya, kita selesaikan bagian akhirnya yaitu

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha + e_n - \left(e_n - \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} e_n^2 + O(e_n^3) \right) \\ x_{n+1} - \alpha &= \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} e_n^2 + O(e_n^3) \end{aligned}$$

Karena $e_n = x_n - \alpha$, maka $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$

Maka:

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} e_n^2 + O(e_n^3)$$

Berdasarkan persamaan galat yang diperoleh, terlihat bahwa suku galat berbentuk e_n^2 . Hal ini menunjukkan bahwa metode Hybrid Steffensen memiliki orde konvergensi dua atau kuadratik.

3.4. Karakteristik Fungsi dan Contohnya

Untuk menguji efektivitas metode *Hybrid Steffensen*, dilakukan simulasi numerik menggunakan beberapa fungsi tak linier yang memiliki karakteristik kompleks, seperti kombinasi osilasi, eksponensial, dan linier. Perbandingan dilakukan terhadap metode *Steffensen* biasa untuk menilai tingkat keberhasilan iterasi dan jumlah iterasi yang dibutuhkan.

Dalam proses perbandingan tersebut, persamaan tak linier yang digunakan disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Uji fungsi dengan tebakan awal $x_0 = 1$

Fungsi	Akar	Iterasi	
		Metode Steffensen	Metode Hybrid Steffensen
$5 \sin \sin (x+2) + e^x + x - 1$	-1,5213452948	Gagal	6
$4 \sin \sin (2x - 0,5) + 3e^{0,6x} + 0,2x - 1$	-2,7674051320	Gagal	10
$5 \cos \cos (x) + e^{x+1} + x$	-1,4182082669	1026	4
$(x^2 - 5x + 7)e^x + x - 3$	-1,2480140416	233	6
$e^x + x$	-4,7641518401	Gagal	6

4. KESIMPULAN

Penelitian ini bertujuan untuk menunjukkan keunggulan metode Hybrid Steffensen dalam menyelesaikan persamaan tak linier yang memiliki karakteristik kompleks, dan hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa pendekatan tersebut mampu mengatasi keterbatasan yang dihadapi oleh metode Steffensen biasa. Melalui simulasi dan pengujian fungsi-fungsi dengan komponen osilasi, eksponensial, dan linier, diperoleh bukti bahwa metode Hybrid Steffensen tidak hanya menyelesaikan persamaan tak linier, tetapi juga secara signifikan mengurangi jumlah iterasi hingga mencapai konvergensi. Dengan demikian, tujuan yang dirumuskan pada awal penelitian telah tercapai dan selaras dengan temuan yang diperoleh dalam pembahasan.

Keunggulan pendekatan Hybrid ini memberikan peluang untuk diterapkan lebih luas dalam kasus-kasus persamaan tak linier yang lebih tinggi kompleksitasnya. Untuk penelitian selanjutnya, metode ini dapat dikembangkan lagi agar terjadi peningkatan orde konvergensi serta fokus memastikan identifikasi karakteristik fungsi yang paling sesuai untuk diterapkan dengan metode yang akan dikembangkan.

REFERENSI

- [1] Puspitasari, A. (2021). Metode Numerik Persamaan Non Linier. In U. D. Nuswantoro, *Modul Pembelajaran Metode Numerik* (pp. 1–22). Semarang: Universitas Dian Nuswantoro (DINUS).
- [2] Silva, C., Chyba, M., & Huerta Cuellar, G. (2024). Mathematical modeling and optimization for real life phenomena. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*.
- [3] Amri, S., Zulfahmi, & Sari, D. P. (2021). Penerapan Metode Newton-Raphson dalam Menentukan Akar Persamaan Nonlinier. *Jurnal Eksakta*, 22(2), 45–52.
- [4] Silva, F., Pereira, L., & Costa, A. (2024). Analytical and Numerical Approaches for Nonlinear Systems. *Journal of Applied Mathematics*, 9(1), 14–25.
- [5] Rosidi, D. (2019). *Metode Numerik untuk Teknik dan Sains*. Yogyakarta: Deepublish.
- [6] Sukmawati, R. A., Rahmawati, N., & Khairunisa, D. (2021). Analisis Galat pada Metode Iterasi Newton dan Steffensen. *Jurnal Matematika dan Aplikasi*, 19(1), 11–19.
- [7] Badr, A., & Thota, R. (2023). Bisection and False Position Methods in Nonlinear Root Problems. *Computational Mathematics and Applications*, 27(3), 201–210.
- [8] Khairunisa, D., & Hendrata, L. (2018). Implementasi Metode Newton-Raphson untuk Akar Persamaan Nonlinier. *Jurnal Ilmu Komputasi*, 6(2), 34–41.
- [9] Sharma, J. R. (2005). A Steffensen-Type Method without Derivatives for Solving Nonlinear Equations. *Applied Mathematics Letters*, 18(8), 965–971.

-
- [10] S. S. Motsa and V. B. Prasad, "Optimal eight-order derivative-free family of iterative methods for solving nonlinear equations," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, no. 23, pp. 11492–11500, 2012.
- [11] Eskandari, A. (2022). *Hybrid Derivative-Free Iterative Methods for Nonlinear Equations*. Numerical Algorithms, 90(4), 1351–1370.
- [12] Iswana, D. (2025). *Metode Hybrid Steffensen untuk Menentukan Hampiran Akar Persamaan Tak Linier* (Skripsi, Universitas Negeri Padang).
- [13] M. A. Khan, S. Islam and M. Jamil, "Study of nonlinear models of oscillatory systems by variational approach," *Alexandria Engineering Journal*, vol. 60, no. 1, pp. 123–135, 2021.
- [14] Eskandari, M. (2022). *An efficient hybrid Steffensen method for solving nonlinear equations*. *Mathematics Journal*, 45(3), 123–135.
- [15] Sukmawati, R. A., Kurniawan, D., & Prasetyo, M. A. (2021). *Analisis galat relatif pada metode numerik bebas turunan*. *Jurnal Matematika Terapan*, 8(2), 115–123.