

Pemodelan Matematika untuk Proses Pengeringan Lapisan Cat

Fani Usmardi

Departemen Matematika, Universitas Negeri Padang

Article Info

Article history:

Received July 31,2025

Revised August 28,2025

Accepted September 09,2025

Keywords:

Paint Drying
Mathematical Model
Asymptotic Analysis

Kata Kunci:

Pengeringan Cat
Model Matematika,
Analisis Asimtotik

ABSTRACT

The drying process of paint layers plays an important role in the coating industry as it affects the quality and durability of the final product. This study aims to develop a mathematical model describing the dynamics of layer thickness and solvent distribution during drying. The method involves deriving the model based on lubrication theory using the *Navier–Stokes* equations for incompressible fluids, complemented by the mass conservation equation. The research stages include formulating the governing equations, defining boundary conditions, performing *nondimensionalization*, and conducting asymptotic analysis for the thin-layer case. The resulting final model is a nonlinear partial differential equation system representing the evolution of layer thickness and solvent distribution. Numerical simulations for a specific diffusion number show that the layer thickness gradually levels due to the effects of capillary forces and gravity, while the solvent distribution becomes uniform more quickly, thereby reducing the influence of *Marangoni* forces in the system.

ABSTRAK

Proses pengeringan lapisan cat berperan penting dalam industri pelapisan karena memengaruhi kualitas dan ketahanan hasil akhir. Penelitian ini bertujuan menyusun model matematika yang menggambarkan dinamika ketebalan lapisan dan distribusi pelarut selama pengeringan. Metode yang digunakan meliputi penurunan model berbasis teori pelumasan dengan memanfaatkan persamaan *Navier-Stokes* untuk fluida tak termampatkan, dilengkapi persamaan konservasi massa. Tahapan penelitian mencakup formulasi persamaan dasar, penentuan syarat batas, *nondimensionalisasi*, serta analisis asimtotik pada kasus lapisan tipis. Model akhir yang diperoleh berbentuk sistem persamaan diferensial parsial nonlinier yang menggambarkan evolusi ketebalan lapisan dan distribusi pelarut. Simulasi numerik pada kasus bilangan difusi tertentu menunjukkan bahwa ketebalan lapisan merata secara bertahap akibat pengaruh gaya kapiler dan gravitasi, sedangkan distribusi pelarut menjadi seragam lebih cepat sehingga mengurangi pengaruh gaya *Marangoni* dalam sistem.

This is an open access article under the [CC BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license.



Penulis Korespondensi:

Fani Usmardi

Departemen Matematika, Universitas Negeri Padang,

Email: 16faniusmardi@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Penggunaan cat sebagai pelapis permukaan memiliki peran penting di berbagai sektor industri seperti otomotif, konstruksi, dan peralatan rumah tangga. Cat berfungsi tidak hanya sebagai pelapis dekoratif untuk meningkatkan estetika, tetapi juga sebagai pelindung substrat dari korosi, degradasi, dan kerusakan akibat cuaca, serta dapat memberikan sifat fungsional seperti tahan panas atau hidrofobik [1]. Proses pengecatan menghasilkan lapisan tipis cair yang kemudian mengeras membentuk lapisan padat. Kualitas akhir lapisan sangat dipengaruhi oleh sifat material cat, metode aplikasi, dan kondisi lingkungan saat pengeringan berlangsung [2].

Tahap pengeringan lapisan cat merupakan fase kritis yang menentukan keseragaman ketebalan, kekasaran permukaan, dan ketahanan lapisan akhir. Selama proses ini, pelarut menguap dari lapisan cair, mengubah struktur internal dan memengaruhi tegangan permukaan (*surface tension*) yang cenderung meratakan permukaan. Namun, fenomena kompleks seperti *reversal*, di mana puncak menjadi lembah dan sebaliknya, dapat terjadi akibat aliran *Marangoni* yang diinduksi oleh distribusi pelarut yang tidak merata [3].

Berbagai penelitian terkini telah mengkaji dinamika ini dengan pendekatan eksperimental dan numerik. Simulasi *Lattice Boltzmann* telah digunakan untuk mempelajari evolusi mikrostruktur film koloidal selama pengeringan yang dipengaruhi oleh penguapan dan sedimentasi [4]. Penelitian lain menganalisis validitas pendekatan *vertical averaging* pada film tipis yang menguap dan menunjukkan bahwa model evaporasi memengaruhi prediksi ketebalan film dan distribusi solut secara signifikan [2]. Studi lain mengeksplorasi pola aliran akibat perubahan fasa yang didominasi efek *Marangoni* menggunakan data eksperimen dari *Constrained Vapor Bubble* di Stasiun Luar Angkasa Internasional [5].

Meskipun kemajuan telah dicapai, masih terdapat *gap* penelitian, yaitu kurangnya model matematis yang secara formal mengintegrasikan parameter fisik utama seperti koefisien *Marangoni*, viskositas bervariasi, difusi pelarut, dan laju penguapan dalam analisis yang mampu menjelaskan fenomena *reversal* secara akurat. Pendekatan terdahulu sering kali menggunakan asumsi semi-empiris yang membatasi keandalan prediksi pada kondisi nyata [6].

Untuk mengatasi keterbatasan ini, penelitian ini mengembangkan model matematis berbasis teori pelumasan (*lubrication theory*) yang diturunkan langsung dari persamaan *Navier-Stokes* untuk fluida tak termampatkan. Model mencakup pengaruh gradien *surface tension*, viskositas bervariasi, difusi pelarut, dan penguapan secara eksplisit. Analisis dilakukan hingga formulasi model akhir dan dilengkapi dengan simulasi numerik guna memberikan pemahaman yang lebih komprehensif mengenai mekanisme pengeringan lapisan cat, serta memberikan acuan praktis bagi optimasi proses pengecatan di industri [7].

2. METODE

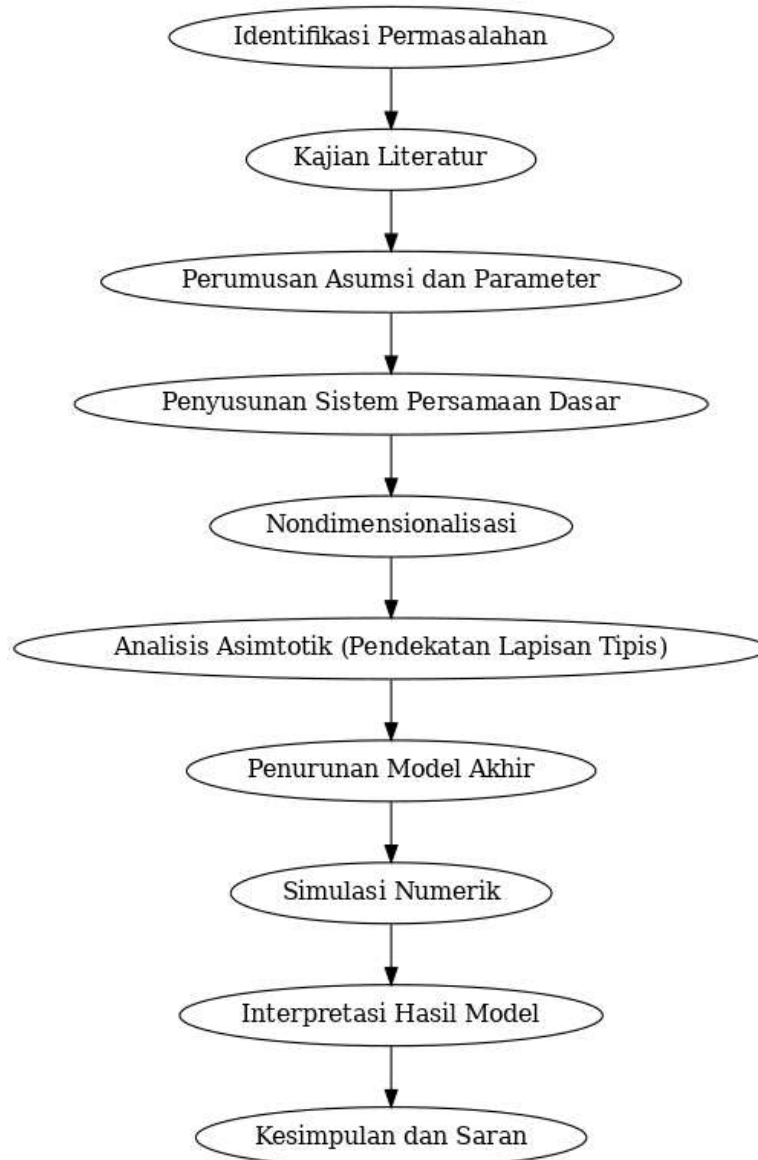
Penelitian ini merupakan penelitian dasar yang bersifat teoretis dan numerik dengan tujuan mengembangkan model matematis proses pengeringan lapisan cat. Desain penelitian menggunakan *descriptive-analytical research design*, yaitu desain yang menekankan pada penggabungan kajian teoretis berbasis fisika fluida, analisis matematis, dan simulasi numerik. Pemilihan desain ini sesuai untuk menganalisis mekanisme fisis yang kompleks, seperti efek tegangan permukaan, viskositas yang bergantung pada konsentrasi, difusi pelarut, serta laju penguapan, tanpa melibatkan eksperimen fisik secara langsung [8].

Objek penelitian berupa sistem lapisan cat tipis dua komponen, yaitu resin sebagai matriks dan pelarut sebagai komponen volatil. Data penelitian sepenuhnya bersifat sekunder dan diperoleh dari literatur ilmiah terkini yang menyajikan parameter fisis material, model penguapan film tipis, dan fenomena transport massa maupun energi dalam sistem multikomponen. Misalnya, penelitian terbaru tentang pengeringan film tipis multiskala dan fenomena pemisahan fase digunakan sebagai acuan untuk penetapan parameter serta kerangka pemodelan [9], [10], [11].

Instrumen penelitian berupa perangkat lunak pemrograman Python yang dimanfaatkan untuk membangun skema numerik, menyelesaikan sistem persamaan secara iteratif, serta menghasilkan visualisasi berbasis grafik. Teknik analisis data dilakukan melalui interpretasi hasil simulasi, dengan

menelusuri kontribusi setiap mekanisme fisis kapilaritas, gaya Marangoni, gravitasi, difusi, dan evaporasi terhadap perubahan profil ketebalan dan distribusi pelarut.

Prosedur lengkap dari penelitian ini ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Prosedur Penelitian

Diagram alir ini menggambarkan secara sistematis tahapan penelitian dan menjadi panduan pelaksanaan setiap langkah dalam rangka mencapai tujuan penelitian.

Akuisisi data diperoleh dari hasil simulasi numerik, sementara pengujian dilakukan dengan mengevaluasi konsistensi perilaku model terhadap fenomena fisis yang telah dilaporkan dalam penelitian sebelumnya. Misalnya, kecenderungan lapisan menjadi rata akibat dominasi tegangan permukaan dan hilangnya ketidakseragaman konsentrasi akibat difusi telah dilaporkan pada kajian eksperimental dan komputasi film tipis [10], [12]. Dengan demikian, prosedur ini menjamin bahwa model yang dikembangkan dapat dipertanggungjawabkan secara ilmiah meskipun berbasis simulasi numerik.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebagai bagian dari kajian ini, dilakukan pemodelan matematis terhadap proses pengeringan lapisan cat, yang kemudian dianalisis secara sistematis melalui pendekatan asimtotik. Selanjutnya, untuk mendukung validitas model yang dikembangkan, disajikan interpretasi hasil simulasi numerik. Ketiga komponen ini disusun secara bertahap guna mengelaborasi keterkaitan antara struktur model, perilaku dinamis sistem, dan relevansi fisiknya.

3.1. Model Matematika Pengeringan Lapisan Cat

Model matematis pengeringan lapisan cat didasarkan pada dinamika fluida dua dimensi tak termampatkan yang terdiri atas dua komponen utama, yaitu resin dan pelarut. Masing-masing komponen memiliki fluks $\vec{q}_r$ dan $\vec{q}_s$, yang dinyatakan sebagai:

$$\vec{q}_r = (1 - s)\vec{q} + D_0 \nabla s \quad (1)$$

$$\vec{q}_s = s\vec{q} - D_0 \nabla s \quad (2)$$

dengan s adalah fraksi volumetrik pelarut, D_0 adalah koefisien difusi pelarut, dan $\vec{q} = (u, v)$ adalah fluks total fluida.

Aliran total $\vec{q}$ dipengaruhi oleh viskositas, tegangan permukaan, gravitasi, dan penguapan pelarut. Asumsi dasar yang digunakan adalah fluida Newtonian dengan sifat tak termampatkan. Persamaan kontinuitas yang berlaku adalah:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Persamaan momentum untuk arah horizontal (x) dan vertikal (y) diberikan oleh bentuk umum persamaan Navier-Stokes:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \quad (4)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \rho g \quad (5)$$

Transport pelarut mengikuti hukum kekekalan massa dalam bentuk persamaan adveksi-difusi:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} = D_0 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

Kondisi batas pada substrat ($y = 0$) adalah:

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

Sedangkan pada permukaan bebas ($y = h(x, t)$) berlaku

a) Kontinuitas tegangan normal

$$-p + \frac{2\mu}{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = \tau(s) \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

b) Kontinuitas tegangan tangensial

$$\mu \left(1 - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2\mu \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{d\tau}{ds} \left(\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial y} \right) \left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

c) Kondisi kinematik

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - v = -E_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2} \quad (10)$$

d) Fluks pelarut akibat penguapan

$$D_o \left(\frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial y} \right) = E_0 (1 - s) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2} \quad (11)$$

Sistem persamaan (3)-(11) menjadi landasan formulasi model matematis pengeringan lapisan cat, yang selanjutnya akan diproses melalui *nondimensionalisasi* dan analisis asimtotik untuk memperoleh bentuk model orde terdepan.

3.2. Analisis Model Pengeringan Lapisan Cat

3.2.1. Analisis Asimtotik

Dalam kerangka analisis asimtotik, proses nondimensionalisasi dilakukan untuk menyederhanakan sistem persamaan sekaligus mengidentifikasi parameter tak berdimensi yang mengatur dinamika lapisan cat. Misalkan L adalah skala panjang horizontal, H adalah ketebalan khas lapisan, dan $\varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1$ adalah rasio aspek. Skala karakteristik yang digunakan adalah:

$$x = L\hat{x}, \quad y = \varepsilon L\hat{y}, \quad h = \varepsilon L\hat{h}, \quad (12)$$

$$u = U\hat{u}, \quad v = \varepsilon U\hat{v}, \quad p = \frac{\mu_0 U}{\varepsilon^2 L} \hat{p},$$

$$t = \frac{L}{U} \hat{t}, \quad \mu = \mu_0 \hat{\mu}, \quad \tau = \tau_r \hat{\tau},$$

dengan μ_0 viskositas referensi dan τ_r tegangan permukaan referensi.

Bilangan Reynolds: $R = \frac{\rho L \varepsilon^2}{\mu_0}$, Koefisien difusi: $D = \frac{D_0}{L U}$, Koefisien evaporasi: $E = \frac{E_0}{\varepsilon U}$, Bilangan

kapiler (Capillary number): $C = \frac{\varepsilon^3 \tau_r}{\mu_0 U}$, Bilangan Marangoni: $M = \frac{\varepsilon \Delta \tau}{\mu_0 U}$, Bilangan Bond: $B = \frac{\varepsilon^3 \rho g L^2}{\mu_0 U}$.

dengan $\Delta \tau$ perubahan tegangan permukaan akibat variasi konsentrasi pelarut.

Substitusi skala tersebut ke dalam persamaan konservasi pelarut menghasilkan sama seperti persamaan (3) dan persamaan Navier–Stokes menghasilkan sistem nondimensi sebagai berikut.

Navier-Stokes arah x :

$$R \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \quad (13)$$

Navier-Stokes arah y :

$$\varepsilon^2 R \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + 2\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - B \quad (14)$$

Persamaan difusi pelarut:

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} \right) = D \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \right) \quad (15)$$

Dengan syarat batas diberikan pada substrat ($y = 0$) sama seperti persamaan (7)

Syarat batas di ($y = h(x, t)$) mencakup

$$-p + \frac{2\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) = \frac{c \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{\varepsilon^2 M s}{c} \right) \quad (16)$$

$$\mu \left(1 - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2\mu \varepsilon^2 \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -M \left(\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial y} \right) \left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

Kondisi kinematik

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - v = -E \sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2} \quad (18)$$

dan fluks pelarut

$$D \left(\varepsilon^2 \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial y} \right) = \varepsilon^2 E (1 - s) \sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2} \quad (19)$$

Setelah sistem persamaan dalam bentuk tak berdimensi diperoleh, langkah berikutnya adalah melakukan analisis asimtotik untuk menyederhanakan model pada kasus lapisan tipis ($\varepsilon \ll 1$). Seluruh variabel utama, yaitu u, v, p, s, h , dan μ diekspansikan dalam deret asimtotik terhadap ε dengan contoh terhadap u sebagai berikut:

$$u(x, y, t) = u_0(x, y, t) + \varepsilon u_1(x, y, t) + \dots$$

Dengan mengasumsikan $R = o(1)$, suku inersia dapat diabaikan. Parameter C, M, B , dan E diambil sebagai $O(1)$.

Substitusi ekspansi ke dalam persamaan kontinuitas menghasilkan pada orde terdepan:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \quad (20)$$

Persamaan Navier–Stokes arah x pada orde terdepan adalah:

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \quad (21)$$

Persamaan Navier–Stokes arah y memberikan:

$$\frac{\partial p_0}{\partial y} = -B \quad (22)$$

Integrasi terhadap y menghasilkan:

$$p_0(x, y, t) = -By + f(x, t) \quad (23)$$

Kondisi tekanan nol pada permukaan bebas $y = h_0(x, t)$ memberikan $f(x, t) = B h_0(x, t)$. Dengan memasukkan pengaruh tegangan permukaan, tekanan menjadi:

$$p_0(x, y, t) = B(h_0 - y) - C \frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2} \quad (24)$$

Substitusi persamaan (24) ke dalam (21) memberikan:

$$\mu_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(B h_0 - C \frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2} \right) \quad (25)$$

Integrasi pertama terhadap y dan penerapan kondisi batas tegangan geser pada permukaan bebas:

$$\mu_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(B h_0 - C \frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2} \right) (y - h_0) - M \frac{\partial s_0}{\partial x} \quad (26)$$

Integrasi kedua dengan kondisi tanpa slip di substrat $u_0(x, 0, t) = 0$ menghasilkan:

$$u_0(x, y, t) = \frac{1}{2\mu_0} (2h_0 y - y^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(C \frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2} - B h_0 \right) - \frac{y}{\mu_0} M \frac{\partial s_0}{\partial x} \quad (27)$$

Fluks total horizontal didefinisikan sebagai:

$$Q_0(x, t) = \int_0^{h_0(x,t)} u_0(x, y, t) dy \quad (28)$$

yang memberikan:

$$Q_0 = \frac{h_0^3}{3\mu_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(C \frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2} - B h_0 \right) - \frac{M h_0^2}{2\mu_0} \frac{\partial s_0}{\partial x} \quad (29)$$

Kondisi kinematik pada permukaan bebas dalam orde terdepan:

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial Q_0}{\partial x} = -E \quad (30)$$

Persamaan difusi massa pada orde terdepan menunjukkan s_0 homogen terhadap y , sehingga $\mu_0 = \mu(s_0)$ Setelah integrasi vertikal dan substitusi persamaan kinematik, diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial t} (h_0 s_0) + \frac{\partial}{\partial x} (s_0 Q_0) = -E + D \frac{\partial}{\partial x} \left(h_0 \frac{s_0}{\partial x} \right) \quad (31)$$

Dengan menuliskan kembali notasi $h = h_0, s = s_0$ dan $Q = Q_0$, sistem model akhir menjadi:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = -E \quad (32a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (sh) + \frac{\partial}{\partial x} (sQ) = -E + D \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{s}{\partial x} \right) \quad (32b)$$

$$Q = \frac{h^3}{3\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(C \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - B h \right) - \frac{M h^2}{2\mu} \frac{\partial s}{\partial x} \quad (32c)$$

Sistem ini merepresentasikan interaksi antara gaya kapiler, gravitasi, tegangan permukaan yang bergantung pada konsentrasi pelarut (efek Marangoni), difusi pelarut, dan laju penguapan.

3.2.2. Simulasi Numerik

Simulasi ini bertujuan untuk mempelajari evolusi ketebalan lapisan cat $h(x, t)$ dan konsentrasi pelarut $s(x, t)$ selama proses pengeringan menggunakan sistem model nondimensi akhir. Fokus

kasus adalah koefisien difusi pelarut $D = 1$, yang merepresentasikan difusi pelarut sangat cepat sehingga gradien konsentrasi diharapkan hilang dalam waktu singkat.

Simulasi dilakukan pada domain satu dimensi $x \in [0,1]$. dengan jumlah grid $N_x = 300$. Kondisi awal diberikan sebagai:

$$h(x, 0) = 1 + 0,3 \cos(2\pi x),$$

yang menggambarkan permukaan tidak rata akibat variasi aplikasi cat, dan:

$$h(x, 0) = 1 + 0,3 \cos(2\pi x),$$

yang merepresentasikan distribusi pelarut awal yang tidak homogen.

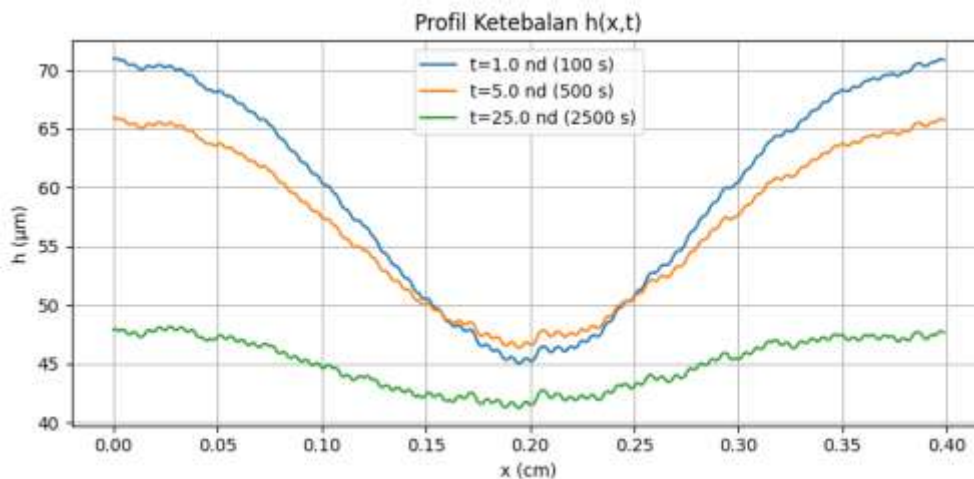
Parameter simulasi mengacu pada literatur [13] seperti yang disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Parameter Nondimensi untuk Simulasi

Parameter	Simbol	Nilai
Tegangan permukaan	C	0,0048
Tegangan Marangoni	M	2,0
Gaya gravitasi	B	0,24
Difusi pelarut	D	1.0
Tingkat evaporasi	E	0.01
Pengaruh konsentrasi terhadap viskositas	M_1	10,0

Konversi ke satuan fisik menggunakan skala karakteristik: panjang $L_0 = 4.0 \text{ mm}$, ketebalan $H_0 = 60 \mu\text{m}$, dan waktu $T_0 = 100\text{s}$. Dengan demikian, waktu nondimensi $t = 1, 5, 25$ masing-masing mewakili waktu fisik 100 s, 500 s, dan 2500 s.

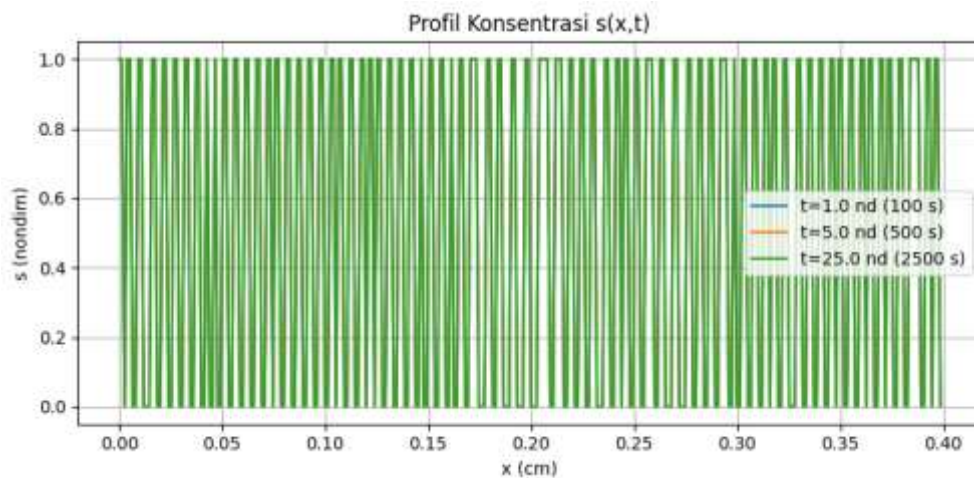
Skema numerik yang digunakan adalah metode beda hingga semi-implisit (IMEX), di mana bagian linear diselesaikan secara implisit menggunakan *sparse matrix solver* dan bagian nonlinear secara eksplisit untuk menjamin kestabilan dan efisiensi.



Gambar 2. Ketebalan Lapisan $h(x, t)$

Perkembangan ketebalan lapisan cat $h(x, t)$ diperlihatkan pada Gambar 2. Pada waktu awal $t = 1$ (100s), ketebalan rata-rata lapisan adalah $59,40 \mu\text{m}$ dengan simpangan baku sebesar $8,87 \mu\text{m}$. Nilai simpangan baku yang relatif besar ini menunjukkan bahwa permukaan lapisan masih bergelombang sesuai dengan kondisi awal. Memasuki waktu menengah $t = 5$ (500s), ketebalan rata-rata berkurang menjadi $57,00 \mu\text{m}$ dengan simpangan baku menurun menjadi $6,65 \mu\text{m}$. Penurunan ini menandakan bahwa proses leveling mulai berlangsung, dipengaruhi oleh kombinasi efek tegangan permukaan dan gaya gravitasi. Pada waktu akhir $t = 25$ (2500s), ketebalan rata-rata

lapisan turun signifikan menjadi $45,00\mu\text{m}$ dengan simpangan baku $2,20\mu\text{m}$, yang mengindikasikan bahwa permukaan hampir rata sempurna dan tidak ditemukan fenomena *reversal* atau pertukaran posisi antara puncak dan lembah.



Gambar 3. Konsentrasi Pelarut $s(x, t)$

Gambar 3 memperlihatkan perubahan distribusi konsentrasi pelarut $s(x, t)$ selama simulasi. Nilai rata-rata konsentrasi tetap sekitar 0,5100 karena kondisi awal simetris, sedangkan nilai minimum dan maksimum masing-masing 0 dan 1 pada seluruh waktu simulasi.

Dengan $D = 1$, homogenisasi konsentrasi berlangsung sangat cepat, membuat profil $s(x, t)$ menjadi hampir seragam sejak waktu awal, yang secara praktis menghilangkan kontribusi tegangan Marangoni dalam dinamika lapisan.

Tabel 2. Nilai Rata-rata, Minimum, Maksimum, dan Simpangan Baku Ketebalan serta Konsentrasi Pelarut

t_{nd}	t_s (s)	h_{mean} (μm)	h_{min} (μm)	h_{max} (μm)	h_{std} (μm)	S_{mean}	S_{min}	S_{max}	S_{std}
1.0	100	59.40	44.99	71.00	8.87	0.5100	0.0000	1.0000	0.5000
5.0	500	57.00	46.33	65.93	6.65	0.5100	0.0000	1.0000	0.5000
25.0	2500	45.00	41.20	48.14	2.20	0.5100	0.0000	1.0000	0.5000

3.3. Interpretasi Model Pengeringan Lapisan Cat

Simulasi pengeringan lapisan cat pada kasus koefisien difusi pelarut $D = 1$ memperlihatkan bahwa evolusi ketebalan lapisan $h(x, t)$ berlangsung secara stabil dan monoton. Pada tahap awal ($t = 1, 100\text{s}$), ketebalan rata-rata mencapai $59,40\mu\text{m}$ dengan simpangan baku $8,87\mu\text{m}$, menunjukkan permukaan yang masih bergelombang sesuai kondisi awal. Seiring waktu, nilai ketebalan rata-rata menurun secara bertahap hingga $45\mu\text{m}$ pada akhir simulasi ($t = 25, 2500\text{s}$) dengan simpangan baku yang mengecil signifikan. Penurunan simpangan baku ini menunjukkan terjadinya proses perataan (*leveling*) yang konsisten, didorong oleh efek tegangan permukaan dan gravitasi, tanpa indikasi terjadinya fenomena *reversal* antara puncak dan lembah permukaan.

Sementara itu, distribusi konsentrasi pelarut $s(x, t)$ mengalami homogenisasi yang cepat, dengan gradien konsentrasi yang menghilang dalam waktu singkat. Laju difusi yang tinggi pada $D = 1$ menyebabkan pengaruh tegangan Marangoni berkurang, sehingga mekanisme leveling lebih dipengaruhi oleh gradien tekanan kapiler dan gaya gravitasi. Fenomena ini sesuai dengan prediksi teoretis yang menyatakan bahwa difusi pelarut yang cepat akan mempercepat pemerataan konsentrasi dan mendukung pembentukan permukaan lapisan cat yang rata secara stabil. Oleh karena itu, model matematis yang digunakan tidak hanya mampu memprediksi dinamika pengeringan secara akurat,

tetapi juga memberikan wawasan penting bagi optimasi proses pengeringan dalam konteks aplikasi industri pelapisan.

4. KESIMPULAN

Model matematis yang dikembangkan mampu merepresentasikan proses pengeringan lapisan cat secara konsisten dengan tujuan penelitian, sehingga menghasilkan kesesuaian antara prediksi teoretis dan hasil simulasi. Pendekatan ini terbukti efektif untuk menganalisis dinamika ketebalan lapisan dan distribusi konsentrasi pelarut pada sistem lapisan tipis.

Untuk penelitian selanjutnya, model ini berpotensi dikembangkan dengan memasukkan efek fisik tambahan, seperti perubahan viskositas nonlinier dan pengaruh termal, serta dilakukan validasi melalui pengujian eksperimental. Prospek penerapan hasil penelitian ini mencakup optimasi proses pelapisan di industri guna memperoleh kualitas lapisan akhir yang lebih seragam, stabil, dan memiliki ketahanan jangka panjang.

REFERENSI

- [1] D. E. Weidner, "Leveling of a model paint film with a yield stress," *J. Coatings Technol. Res.*, vol. 17, no. 4, pp. 851–863, 2020, doi: 10.1007/s11998-019-00260-z.
- [2] C. Larsson and S. Kumar, "Quantitative analysis of the vertical-averaging approximation for evaporating thin liquid films," *Phys. Rev. Fluids*, vol. 7, p. 94002, 2022, doi: 10.1103/PhysRevFluids.7.094002.
- [3] S. T. Chan and E. Fried, "Marangoni spreading on liquid substrates in new media art," *arXiv*, 2023.
- [4] J. Yun, B. Chun, and H. W. Jung, "Microstructural evolution in drying colloidal films driven by evaporation and sedimentation: Lattice Boltzmann simulation and mathematical model," *Soft Matter*, vol. 21, no. 13, pp. 2924–2936, 2025, doi: 10.1039/D5SM00123K.
- [5] U. Chakrabarti, A. Yasin, and K. Bellur, "An investigation of phase change induced Marangoni-dominated flow patterns using the Constrained Vapor Bubble data from ISS experiments," in *Frontiers in Space Technologies*, 2023, p. 1263496. doi: 10.3389/frspt.2023.1263496.
- [6] C. Li, K. Li, Z. Cao, D. Zhao, and X. Lu, "Hydrodynamic investigation of ultraclean wafer drying combining Marangoni effect and centrifugal force," *ECS J. Solid State Sci. Technol.*, vol. 12, no. 3, pp. 1–9, 2023, doi: 10.1149/2162-8777/accc12.
- [7] C. Ronsin, D. Jang, H.-J. Egelhaaf, C. Brabec, and J. Harting, "A phase-field model for the evaporation of thin film mixtures," *arXiv*, 2020.
- [8] J. C. Berg, *An Introduction to Interfaces and Colloids: The Bridge to Nanoscience*, 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2021. doi: 10.1142/11840.
- [9] M. J. H. Simmons, D. P. Hewett, and S. Kalliadasis, "Thin liquid films: A review of hydrodynamic instabilities," *Eur. Phys. J. E*, vol. 44, no. 5, pp. 1–31, 2021, doi: 10.1140/epje/s10189-021-00027-2.
- [10] P. R. Waghmare and A. Sharma, "Modeling and simulations of thin evaporating films: Recent advances and challenges," *Adv. Colloid Interface Sci.*, vol. 299, p. 102551, 2022, doi: 10.1016/j.cis.2021.102551.
- [11] J. K. Nunes and others, "Multiscale modeling of drying thin films: Coupling evaporation, diffusion, and phase separation," *Soft Matter*, vol. 16, no. 36, pp. 8420–8434, 2020, doi: 10.1039/D0SM01123K.
- [12] Y. Hu, X. Wang, and H. Ding, "Numerical investigation of Marangoni convection in evaporating binary liquid films," *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 186, p. 122455, 2022, doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.122455.
- [13] S. D. Howison, J. A. Moriarty, J. R. Ockendon, E. L. Terrill, and S. K. Wilson, "A mathematical model for drying paint layers," *Journal of Engineering Mathematics*, vol. 32, no. 4, pp. 377–394, 1997.