

Model Matematika Penyebaran Penyakit Cacar Air

Azhara Jamilah

Departemen Matematika, Universitas Negeri Padang

Article Info

Article history:

Received: Juli 26, 2025

Revised Agustus 7, 2025

Accepted September 9, 2025

Keywords:

Mathematical Model

Chickenpox Disease

Basic Reproduction Number

Kata Kunci:

Model Matematika

Penyakit Cacar Air

Bilangan Reproduksi Dasar

ABSTRACT

Chickenpox caused by the Varicella zoster virus, exhibits very high transmissibility among individuals lacking immunity. Limited understanding of how infection rates, vaccination coverage, and population immunity interact impedes effective control. This study investigates the impact of vaccination on reducing infections and characterizes the disease's transmission dynamics. By combining a fundamental theoretical framework with a descriptive literature review, we develop a nonlinear differential-equation model comprising five compartments: unvaccinated susceptibles, vaccinated susceptibles, exposed individuals, infectious individuals, and recovered individuals. The stability of both the disease-free and endemic equilibria is assessed through system linearization and examination of the Jacobian matrix, then validated via simulations under various initial conditions. The results reveal two possible equilibrium states. When the average number of secondary cases produced by one infectious individual remains below one, the disease-free equilibrium is stable; if this number exceeds one, the disease-free equilibrium becomes unstable and a stable endemic equilibrium emerges.

ABSTRAK

Penyakit cacar air yang disebabkan oleh virus Varicella zoster, menunjukkan penularan sangat tinggi pada individu yang belum memiliki kekebalan. Pemahaman terbatas tentang bagaimana tingkat infeksi, cakupan vaksinasi, dan kekebalan populasi saling berinteraksi menghambat pengendalian yang efektif. Penelitian ini menelaah bagaimana vaksinasi mengurangi infeksi dan memetakan dinamika penyebaran penyakit. Menggunakan pendekatan dasar-teoritis dan tinjauan pustaka deskriptif, selanjutnya membentuk model persamaan diferensial nonlinier dengan lima kelompok: rentan belum divaksinasi, rentan divaksinasi, terpapar, menular, dan sembuh. Kestabilan keadaan bebas penyakit dan endemik dianalisis melalui linierisasi sistem dan pemeriksaan matriks Jacobi, lalu divalidasi dengan simulasi pada berbagai kondisi awal. Hasil mengungkap dua kemungkinan keadaan. Ketika rata-rata jumlah kasus baru yang ditimbulkan oleh satu orang menular tetap di bawah satu, keadaan bebas penyakit stabil; jika angka ini melebihi satu, keadaan bebas penyakit menjadi tidak stabil dan keadaan endemik muncul serta tetap stabil.

This is an open access article under the [CC BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license.



Penulis Korespondensi:

Azhara Jamilah

1. PENDAHULUAN

Cacar air merupakan penyakit menular umum yang ada di seluruh dunia. Cacar air penyakit infeksi virus yang disebabkan oleh *Varicella Zoster Virus* (VZV) [1]. Virus ini dapat dengan mudah menular dari orang yang terinfeksi ke siapa saja yang belum pernah menderita cacar air atau yang belum pernah di vaksinasi cacar air [2]. VZV menular melalui udara ataupun kontak langsung dengan orang yang terinfeksi. Target utama infeksi VZV adalah *limfosit T*, *ganglia*, dan *sel epitel* [3].

Gejala utama penyakit ini adalah ruam atau kemerahan di kulit yang menyerupai jerawat atau sengatan serangga dan terasa sangat gatal. Ruam ini akan berubah menjadi lepuhan berisi cairan yang kemudian akan pecah dan akhirnya membentuk keropeng setelah sembuh [4]. Komplikasi akibat penyakit ini juga bisa terjadi pada penderita yang memiliki sistem kekebalan tubuh lemah, diantaranya *sindrom Reye*, *Pneumonia*, *Encephalitis*, *Ataksia Cerebal*, peradangan pada tulang belakang bahkan kematian [5].

Penyebaran *Varicella* yang begitu cepat melalui udara dan kontak langsung menjadikannya sebagai tantangan kesehatan masyarakat yang signifikan [6]. Hingga saat ini, terdapat dua kesenjangan utama dalam penanganan penyakit cacar air. Pertama, kurangnya pemahaman tentang dinamika penyakit, terutama bagaimana faktor-faktor seperti tingkat infeksi, vaksinasi, dan imunitas populasi saling mempengaruhi. Kedua, belum diketahui secara pasti sejauh mana vaksinasi dapat menekan tingkat infeksi dalam berbagai skenario epidemiologis.

Belakangan ini, lonjakan kasus cacar air kembali menjadi sorotan Kementerian Kesehatan khususnya di kalangan pelajar setelah tercatat 73 kasus di SMPN 8 Tangerang Selatan, SDN Blok I Cilegon, dan sebuah SD di Situbondo, Jawa Timur [7]. Merespons hal ini, Kementerian berfokus pada pencegahan lonjakan yang lebih besar dan perlindungan pelajar dari risiko fatal. Selain sosialisasi jalur penularan *Varicella-zoster* dan pentingnya vaksinasi, edukasi tentang protokol isolasi juga krusial untuk meminimalkan miskonsepsi dan menghentikan penyebaran setelah infeksi terjadi [8]. Matematika memegang peranan penting dalam merespons wabah semacam ini. Dengan pemodelan matematika, yang mana di dalamnya ada membahas model epidemiologi maka melalui sistem persamaan diferensial nonlinier peneliti dapat merepresentasikan dinamika infeksi, vaksinasi, dan imunitas populasi secara kuantitatif. Hasil pemodelan ini tidak hanya membantu memetakan potensi lonjakan kasus, tetapi juga merumuskan strategi isolasi dan intervensi yang paling efektif dalam berbagai skenario awal[9].

Beberapa peneliti telah melakukan penelitian terkait pemodelan penyebaran penyakit cacar air, diantaranya penelitian oleh [10] yang melakukan pemodelan untuk memahami jadwal vaksinasi terkini dinamika penularan dan memperkirakan parameter utama penyakit serta menyertakan musiman ke dalam model dan menyesuaikannya dengan bulanan data kejadian dari Hongaria. Hasil penelitian menunjukkan bahwa selain musim, penyakit juga terjadi karena dinamika yang memiliki periodisitas multi-tahunan intrinsik.

Selanjutnya penelitian oleh [11] terkait pemodelan matematika SEITR yang membahas tentang model matematika SEITR pada penyakit cacar air. Hasil penelitian menunjukkan adanya pengaruh treatment dalam mengurangi jumlah individu yang terinfeksi. Serta penelitian oleh [9] yang membahas tentang model matematika dengan menggunakan parameter baru berupa tingkat tindakan pencegahan seperti karantina dan kebersihan individu. Hasil penelitian menunjukkan bahwa tingkat tindakan pencegahan memiliki peran yang sangat penting pada saat yang sama untuk mengurangi kemungkinan terinfeksi oleh cacar air.

Berdasarkan uraian di atas, serta melihat dari beberapa penelitian sebelumnya maka pada penelitian kali ini akan dilakukan penelitian untuk merumuskan sebuah model matematika dengan mempertimbangkan adanya sifat infeksi yang berbeda dari kelompok rentan yang sudah divaksin dan yang belum divaksin untuk melihat bagaimana vaksinasi dapat menekan tingkat infeksi serta untuk memahami lebih dalam penyebaran penyakit cacar air.

2. METODE

Penelitian ini merupakan penelitian dasar (teoritis). Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini:

- Menentukan asumsi dasar, variabel, dan parameter yang relevan terkait penyakit cacar air.
- Membentuk model matematika penyebaran penyakit cacar air.
- Mencari titik ekuilibrium model matematika penyebaran penyakit cacar air.
- Menganalisis dan menentukan kestabilan titik ekuilibrium pada model matematika penyebaran penyakit cacar air.
- Membuat interpretasi dari hasil analisis model matematika penyebaran penyakit cacar air.
- Menarik Kesimpulan

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Model Matematika Penyebaran Penyakit Cacar Air

Membangun suatu model matematika membutuhkan asumsi berdasarkan faktor-faktor yang relevan dan memungkinkan model tetap berada dalam ruang lingkup masalah. Kemudian mengidentifikasi serta merumuskan hubungan antara variabel dan parameter yang terlibat.

Adapun asumsi-asumsi yang digunakan dalam penyusunan model:

- Tidak ada migrasi masuk atau keluar pada populasi.
- Semua parameter dianggap konstan.
- Waktu tunggu antara kelahiran dan pemberian vaksin diabaikan.
- Vaksin hanya diberikan satu kali.
- Kelompok *susceptible unvaccinated* yang mengalami paparan tinggi serta memiliki imunitas yang lemah berkemungkinan akan langsung masuk ke kelompok *infected*.
- Efek vaksin hanya untuk menekan angka infeksi pada kelompok *susceptible vaccinated* bukan untuk membuat kelompok ini kebal dari penyakit, sehingga risiko infeksi pada kelompok ini tetap ada dan cukup rendah tetapi tidak nol. Hal ini juga mencerminkan adanya heterogenitas respon imun terhadap vaksin.
- Kematian akibat virus hanya terjadi pada kelompok *infected*, dikarenakan pada kelompok *exposed* risiko fatal yang diakibatkan virus belum sampai pada tahap mengganggu fungsi sistem tubuh secara signifikan.
- Individu yang telah sembuh tidak mengalami penurunan kekebalan dan tidak kembali ke kelompok rentan.

Adapun variabel yang digunakan dalam penyusunan model:

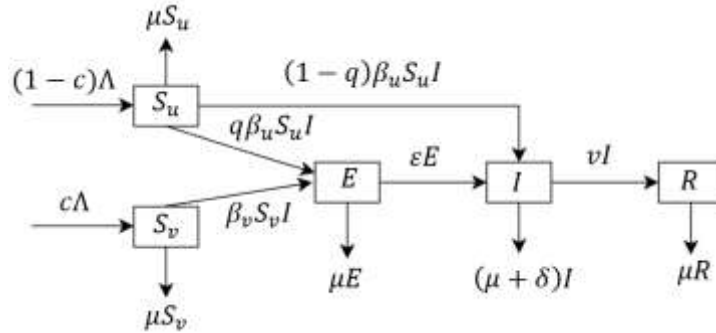
- Susceptible Unvaccinated* (S_u) adalah kelompok individu yang rentan terhadap penyakit cacar air dan belum di vaksin.
- Susceptible Vaccinated* (S_v) adalah kelompok individu yang rentan terhadap penyakit cacar air dan sudah di vaksin.
- Exposed* (E) adalah kelompok individu yang sudah terpapar namun belum bisa menyebarkan penyakit.
- Infected* (I) adalah kelompok individu yang telah terinfeksi penyakit cacar air dan dapat menyebarkan penyakit.
- Recovered* (R) adalah kelompok individu yang telah sembuh dari penyakit cacar air.

Adapun parameter yang digunakan dalam penyusunan model:

- Λ : Laju kelahiran.
- c : Proporsi individu yang divaksinasi.
- β_u : Laju infeksi untuk kelompok rentan yang tidak divaksinasi.
- β_v : Laju infeksi untuk kelompok rentan yang divaksinasi.
- μ : Laju kematian alami.
- q : Frekuensi paparan ringan.

- g. ε : Laju peralihan dari terpapar menjadi terinfeksi.
- h. δ : Laju kematian yang akibat cacar air.
- i. v : Laju pemulihan.

Asumsi yang telah disusun serta berdasarkan hubungan antar variabel dan parameter yang ada, maka dapat dibentuk diagram pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Alir Model Penyebaran Penyakit Cacar Air

Berdasarkan Gambar 1 diperoleh bentuk model matematika penyebaran penyakit cacar air dalam sistem persamaan (1).

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_u}{dt} &= (1-c)\Lambda - q\beta_u S_u I - (1-q)\beta_u S_u I - \mu S_u \\
 &= (1-c)\Lambda - q\beta_u S_u I - \beta_u S_u I + q\beta_u S_u I - \mu S_u \\
 \frac{dS_u}{dt} &= (1-c)\Lambda - \beta_u S_u I - \mu S_u \\
 \frac{dS_v}{dt} &= c\Lambda - \beta_v S_v I - \mu S_v \\
 \frac{dE}{dt} &= q\beta_u S_u I + \beta_v S_v I - \mu E - \varepsilon E \\
 \frac{dI}{dt} &= \varepsilon E + (1-q)\beta_u S_u I - (\mu + \delta + v)I \\
 \frac{dR}{dt} &= vI - \mu R
 \end{aligned} \tag{1}$$

Titik ekuilibrium dari sistem persamaan (1) yaitu (S_u, S_v, E, I, R) yang diperoleh ketika setiap persamaan diferensial sama dengan nol, sehingga:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_u}{dt} &= (1-c)\Lambda - \beta_u S_u I - \mu S_u = 0 \\
 \frac{dS_v}{dt} &= c\Lambda - \beta_v S_v I - \mu S_v = 0 \\
 \frac{dE}{dt} &= q\beta_u S_u I + \beta_v S_v I - \mu E - \varepsilon E = 0 \\
 \frac{dI}{dt} &= \varepsilon E + (1-q)\beta_u S_u I - (\mu + \delta + v)I = 0 \\
 \frac{dR}{dt} &= vI - \mu R = 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

3.2. Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit Cacar Air

Menganalisis model ini akan dilakukan dengan menentukan bilangan reproduksi dasar, selanjutnya titik ekuilibrium terhadap dua kondisi yaitu saat $I = 0$ dan saat $I \neq 0$, serta analisis dari titik ekuilibrium dan simulasi dari analisis model matematika tersebut.

3.2.1. Bilangan Reproduksi Dasar (\mathfrak{R}_0)

Bilangan reproduksi dasar merupakan nilai batas yang digunakan untuk menentukan status endemik suatu penyakit. Parameter ambang batas \mathfrak{R}_0 ditentukan oleh radius spectral matriks *next-generation* [11]. Nilai ini menunjukkan rata-rata jumlah infeksi baru yang dihasilkan oleh satu individu terinfeksi yang ada di populasi. Definisikan vektor $\bar{x} = x_i, i = 1, 2, \dots, n$, dengan x_i adalah jumlah orang atau proporsi pada kompartemen ke- i . Populasi dinamik dari sub populasi ke- i dapat ditulis sebagai:

$$x_i = F_i - V_i \quad (3)$$

Dengan F_i menyatakan komponen pembentuk matriks F yang merupakan infeksi baru yang masuk pada kompartemen ke- i . V_i menyatakan komponen pembentuk matriks V yang merupakan transfer keluar atau masuk dari kompartemen satu ke kompartemen lainnya. F dan V didefinisikan sebagai matriks $m \times m$ dalam bentuk:

$$F_{ij} = \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} \quad \text{dan} \quad V_{ij} = \frac{\partial V_i(x)}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

Matriks *next-generation* didefinisikan:

$$K = FV^{-1} \quad (5)$$

dimana \mathfrak{R}_0 = nilai eigen terbesar dari matriks K

Penyebaran penyakit cacar air melibatkan dua kompartemen yang menjadi asal penularannya yakni kelompok *exposed* dan *infected*:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= q\beta_u S_u I + \beta_v S_v I - \mu E - \varepsilon E \\ \frac{dI}{dt} &= \varepsilon E + (1-q)\beta_u S_u I - (\mu + \delta + v)I \end{aligned}$$

Definisi matriks *next-generation* didapatkan:

$$\begin{aligned} K &= FV^{-1} \\ K &= \begin{pmatrix} 0 & q\beta_u S_u + \beta_v S_v \\ 0 & (1-q)\beta_u S_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mu + \delta + v) & 0 \\ \varepsilon & (\mu + \varepsilon) \end{pmatrix} \frac{1}{(\mu + \varepsilon)(\mu + \delta + v)} \\ \mathfrak{R}_0 &= \frac{\Lambda[\varepsilon q\beta_u(1-c) + \varepsilon\beta_v c + (\mu + \varepsilon)(1-q)(1-c)\beta_u]}{\mu(\mu + \varepsilon)(\mu + \delta + v)} \end{aligned} \quad (6)$$

3.2.2. Titik Ekuilibrium saat $I = 0$

Titik ekuilibrium ini adalah kondisi dimana tidak ada kelompok yang bisa menginfeksi, artinya juga tidak akan ada kelompok yang terpapar. Maka dengan menyelesaikan sistem persamaan (2) diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit:

$$E_0 = (S_u, S_v, E, I, R) = \left(\frac{(1-c)\Lambda}{\mu}, \frac{c\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0 \right)$$

3.2.3. Titik Ekuilibrium saat $I \neq 0$

Titik ekuilibrium ini adalah kondisi dimana ada individu yang bisa menginfeksi kelompok rentan pada populasi. Maka titik ekuilibrium yang diperoleh adalah titik ekuilibrium endemik penyakit:

$$E_1 = (S_u^*, S_v^*, E^*, I^*, R^*)$$

dimana

$$\begin{aligned} S_u^* &= \frac{(1-c)\Lambda}{\beta_u I^* + \mu} \\ S_v^* &= \frac{c\Lambda}{\beta_v I^* + \mu} \\ E^* &= \frac{I^*(q\beta_u S_u^* + \beta_v S_v^*)}{\mu + \varepsilon} \end{aligned}$$

$$I^* = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4\mu^2(\mu + \varepsilon)^2(\mu + \delta + v)^2\beta_u\beta_v(\mathfrak{R}_0 - 1)}}{2A}$$

$$R^* = \frac{vI^*}{\mu}$$

dengan

$$\begin{aligned} A &= (\mu + \varepsilon)(\mu + \delta + v)\beta_u\beta_v \\ B &= \mu(\mu + \varepsilon)(\mu + \delta + v)(\beta_u + \beta_v) - \varepsilon q\beta_u(1 - c)\Lambda\beta_v - \varepsilon c\Lambda\beta_u\beta_v - \\ &\quad (\mu + \varepsilon)(1 - q)(1 - c)\Lambda\beta_u\beta_v \end{aligned}$$

3.2.4. Kestabilan Titik Ekuilibrium Model Penyebaran Penyakit Cacar Air

Analisis kestabilan titik ekuilibrium akan dicari dengan cara menentukan nilai eigen [12] dari matriks Jacobi pada sistem persamaan (1) yang diperoleh:

$$J = \begin{bmatrix} -(\beta_u I + \mu) & 0 & 0 & -\beta_u S_u & 0 \\ 0 & -(\beta_v I + \mu) & 0 & -\beta_v S_v & 0 \\ q\beta_u I & \beta_v I & -(\mu + \varepsilon) & q\beta_u S_u + \beta_v S_v & 0 \\ (1 - q)\beta_u I & 0 & \varepsilon & (1 - q)\beta_u S_u - (\mu + \delta + v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v & -\mu \end{bmatrix}$$

Analisis kestabilan titik ekuilibrium untuk kedua titik:

1. Kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = \left(\frac{(1-c)\Lambda}{\mu}, \frac{c\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$

Matriks Jacobi dari titik ekuilibrium $E_0 = \left(\frac{(1-c)\Lambda}{\mu}, \frac{c\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$:

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & 0 & -\frac{\beta_u(1-c)\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & -\frac{\beta_v c\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu + \varepsilon) & \frac{q\beta_u(1-c)\Lambda}{\mu} + \frac{\beta_v c\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \frac{(1-q)\beta_u(1-c)\Lambda}{\mu} - (\mu + \delta + v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v & -\mu \end{bmatrix}$$

Diperoleh nilai eigen dari $J(E_0)$:

$$\lambda_{1,2,3} = -\mu \quad \text{dan} \quad \lambda_{4,5} = -\frac{1}{2}(B \pm \sqrt{B^2 - 4C})$$

dengan:

$$B = (\mu + \varepsilon)(\mu + \delta + v) - \frac{(1-q)\beta_u(1-c)\Lambda}{\mu}$$

$$C = \frac{\mu(\mu + \varepsilon)(\mu + \delta + v) - (\mu + \varepsilon)(1-q)(1-c)\beta_u\Lambda - \varepsilon q\beta_u(1-c)\Lambda - \varepsilon\beta_v c\Lambda}{\mu}$$

Didapatkan semua nilai eigen bernilai negatif, sehingga titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0) bersifat stabil asimtotik.

2. Kestabilan titik ekuilibrium endemik penyakit $E_1 = (S_u^*, S_v^*, E^*, I^*, R^*)$

Matriks Jacobi dari titik ekuilibrium $E_1 = (S_u^*, S_v^*, E^*, I^*, R^*)$:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & -\frac{\beta_u(1-c)\Lambda}{\beta_u I + \mu} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & -\frac{\beta_v c \Lambda}{\beta_v I + \mu} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & -(\mu + \varepsilon) & \left[\frac{q\beta_u(1-c)\Lambda}{\beta_u I + \mu} + \frac{\beta_v c \Lambda}{\beta_v I + \mu} \right] & 0 \\ a_{41} & 0 & -\varepsilon & \left[\frac{(1-q)\beta_u(1-c)\Lambda}{\beta_u I + \mu} - (\mu + \delta + v) \right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v & -\mu \end{bmatrix}$$

dengan:

$$\begin{aligned} a_{11} &= - \left[\beta_u \left(\frac{-B + \sqrt{B^2 + 4\mu^2(\mu + \varepsilon)^2(\mu + \delta + v)^2\beta_u\beta_v(\Re_0 - 1)}}{2A} \right) + \mu \right] \\ a_{22} &= - \left[\beta_v \left(\frac{-B + \sqrt{B^2 + 4\mu^2(\mu + \varepsilon)^2(\mu + \delta + v)^2\beta_u\beta_v(\Re_0 - 1)}}{2A} \right) + \mu \right] \\ a_{31} &= q\beta_u \left(\frac{-B + \sqrt{B^2 + 4\mu^2(\mu + \varepsilon)^2(\mu + \delta + v)^2\beta_u\beta_v(\Re_0 - 1)}}{2A} \right) \\ a_{32} &= \beta_v \left(\frac{-B + \sqrt{B^2 + 4\mu^2(\mu + \varepsilon)^2(\mu + \delta + v)^2\beta_u\beta_v(\Re_0 - 1)}}{2A} \right) \\ a_{41} &= (1-q)\beta_u \left(\frac{-B + \sqrt{B^2 + 4\mu^2(\mu + \varepsilon)^2(\mu + \delta + v)^2\beta_u\beta_v(\Re_0 - 1)}}{2A} \right) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor untuk matriks diatas, diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -\mu$, sementara empat nilai eigen lainnya ditentukan dengan polinom berderajat 4 seperti pada persamaan (7):

$$b_0\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4 = 0 \quad (7)$$

dengan:

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_1 &= 2\mu + \varepsilon + \delta + v - \frac{(1-q)\beta_u(1-c)\Lambda}{\beta_u I + \mu} \\ b_2 &= (a_{11} + a_{22}) \left[-(\mu + \varepsilon) - (\mu + \delta + v) + \frac{(1-q)\beta_u(1-c)\Lambda}{\beta_u I + \mu} \right] + a_{41} \frac{\beta_u(1-c)\Lambda}{\beta_u I + \mu} \\ b_3 &= (a_{11} + a_{22}) \left[(\mu + \varepsilon) \left(\frac{(1-q)\beta_u(1-c)\Lambda}{\beta_u I + \mu} - (\mu + \delta + v) \right) + \varepsilon \left(\frac{q\beta_u(1-c)\Lambda}{\beta_u I + \mu} + \frac{\beta_v c \Lambda}{\beta_v I + \mu} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\beta_u(1-c)\Lambda}{\beta_u I + \mu} (\varepsilon a_{31} + a_{41}(a_{22} + \mu + \varepsilon)) \\ b_4 &= a_{11}a_{22} \left[-(\mu + \varepsilon) \left(\frac{(1-q)\beta_u(1-c)\Lambda}{\beta_u I + \mu} + (\mu + \delta + v) \right) + \varepsilon \left(\frac{q\beta_u(1-c)\Lambda}{\beta_u I + \mu} + \frac{\beta_v c \Lambda}{\beta_v I + \mu} \right) \right] \\ &\quad + a_{11} \frac{\beta_v c \Lambda \varepsilon a_{32}}{\beta_v I + \mu} - \frac{\beta_u(1-c)\Lambda}{\beta_u I + \mu} [\varepsilon a_{31}a_{32} + a_{41}a_{22}(\mu + \varepsilon)] \end{aligned}$$

Selanjutnya gunakan Routh-Hurwitz untuk persamaan (7):

Tabel 1. Kriteria Routh Hurwitz

λ^4	1	b_2	b_4
λ^3	b_1	b_3	0
λ^2	$x = \frac{b_1 b_2 - b_3}{b_1}$	$y = \frac{b_1 b_4}{b_1} = b_4$	0
λ	$z = \frac{x b_3 - b_1 b_4}{x}$	0	0
λ^0	b_4	0	0

Agar semua entri di kolom kiri Tabel bernilai positif, harus dipenuhi syarat:

- i. $b_1 > 0$
- ii. $x > 0 \Rightarrow b_1 b_2 - b_3 > 0$
 $\Rightarrow b_1 b_2 > b_3$
- iii. $z > 0 \Rightarrow (b_1 b_2 - b_3) b_3 - b_1 b_4 > 0$
 $\Rightarrow b_1 b_2 b_3 > b_3^2 + b_1 b_4$
- iv. $b_4 > 0$

Semua nilai eigen dari akar polinomial untuk titik ekuilibrium endemik penyakit (E_1) = ($S_u^*, S_v^*, E^*, I^*, R^*$) akan stabil asimtotik jika semua syarat untuk kriteria Routh terpenuhi dengan kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$.

3.2.5 Simulasi Kestabilan Model Matematika Penyebaran Penyakit Cacar Air

Simulasi model matematika penyebaran penyakit cacar air menggunakan software dengan memberikan nilai untuk masing-masing parameter:

1. Ketika $\mathcal{R}_0 < 1$

Untuk mensimulasikan kondisi dimana virus *Varicella* tidak dapat berkembang dalam populasi, digunakan kombinasi parameter yang menghasilkan nilai $\mathcal{R}_0 < 1$. Nilai ini menunjukkan bahwa rata-rata jumlah infeksi baru yang dihasilkan kurang dari satu, sehingga infeksi tidak dapat bertahan dalam populasi. Oleh karena itu, nilai-nilai parameter yang digunakan dalam simulasi ini dipilih berdasarkan literatur yang relevan untuk $\mathcal{R}_0 < 1$.

Tabel 2. Nilai Parameter $\mathcal{R}_0 < 1$

Parameter	Nilai
Λ	1
μ	0.1
ε	0.2
δ	0.3
ν	0.1
c	0.8
q	0.6
β_u	0.1
β_v	0.05

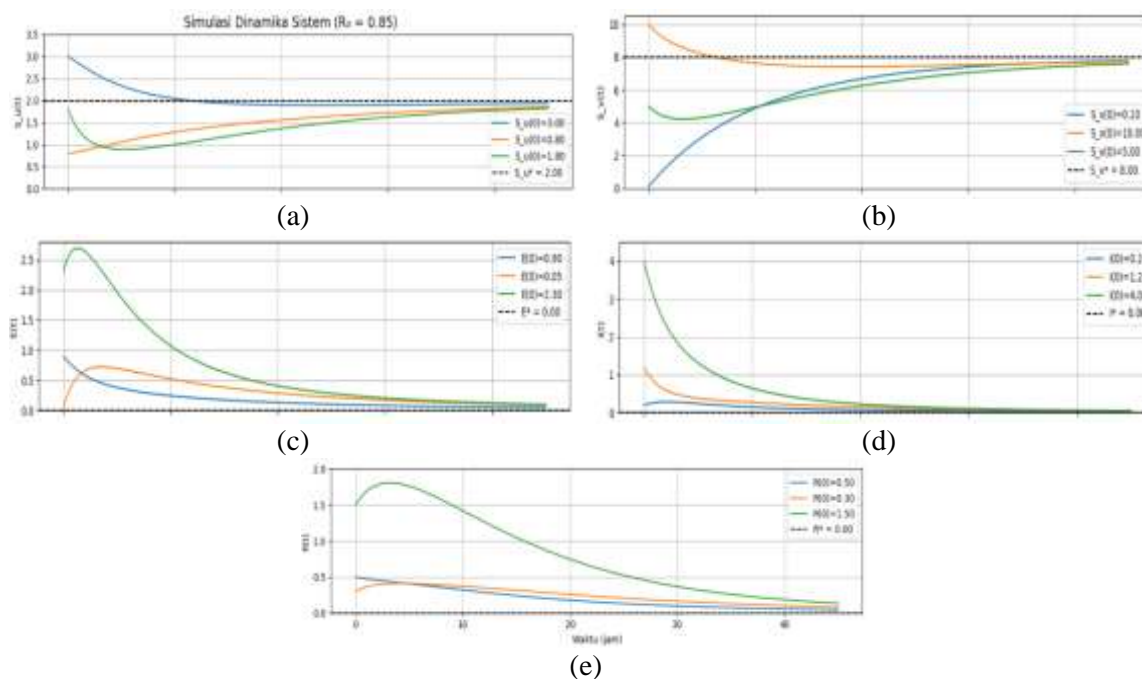
Dari nilai parameter pada Tabel 2, dihitung nilai \mathcal{R}_0 yang diperoleh sebesar

$$\mathcal{R}_0 = 0.8533$$

Diperoleh $\mathcal{R}_0 < 1$. Titik ekuilibrium yang diperoleh dari parameter tersebut adalah $E_0 = (2, 8, 0, 0, 0)$. Dalam simulasi ini digunakan tiga titik awal, yaitu:

- i. $S_u(0) = 3.00; S_v(0) = 0.10; E(0) = 0.90; I(0) = 0.20; R(0) = 0.50$
- ii. $S_u(0) = 0.80; S_v(0) = 10.00; E(0) = 0.05; I(0) = 1.20; R(0) = 0.30$
- iii. $S_u(0) = 1.80; S_v(0) = 5.00; E(0) = 2.30; I(0) = 4.00; R(0) = 1.50$

Berdasarkan nilai parameter dan nilai awal diatas diperoleh grafik dari masing-masing kelompok terhadap waktu t :

Gambar 2. Hasil Simulasi Numerik saat $\mathcal{R}_0 < 1$

Berdasarkan Gambar 2 hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa saat $\mathcal{R}_0 < 1$ sistem akan bergerak menuju titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 . Pada kondisi ini, populasi kelompok *exposed* dan *infected* menurun hingga mencapai nol, secara langsung juga mengakibatkan tidak adanya kelompok *recovered*. Sementara populasi kelompok *susceptible unvaccinated* dan *susceptible vaccinated* terus meningkat dan stabil. Hal ini menunjukkan bahwa *varicella* tidak dapat bertahan dalam populasi dan akan menghilang dari sistem. Simulasi dengan berbagai kondisi awal yang berbeda juga konsisten memperlihatkan sistem menuju titik $E_0 = \left(\frac{(1-c)\Lambda}{\mu}, \frac{c\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0 \right)$ yang menandakan kestabilan asimtotik titik tersebut.

2. Ketika $\mathcal{R}_0 > 1$

Akan disimulasikan untuk keadaan dimana tidak ada penyebaran penyakit cacar air di dalam populasi, digunakan kombinasi nilai parameter yang menghasilkan nilai $\mathcal{R}_0 > 1$. Nilai ini menunjukkan bahwa rata-rata jumlah infeksi baru yang dihasilkan lebih dari satu.

Tabel 3. Nilai Parameter $\mathcal{R}_0 > 1$

Parameter	Nilai
Λ	1
μ	0.1
ε	0.2
δ	0.3
ν	0.1
c	0.4
q	0.5
β_u	0.1
β_v	0.05

Dari nilai parameter pada Tabel 3, dihitung nilai \mathcal{R}_0 yang diperoleh sebesar

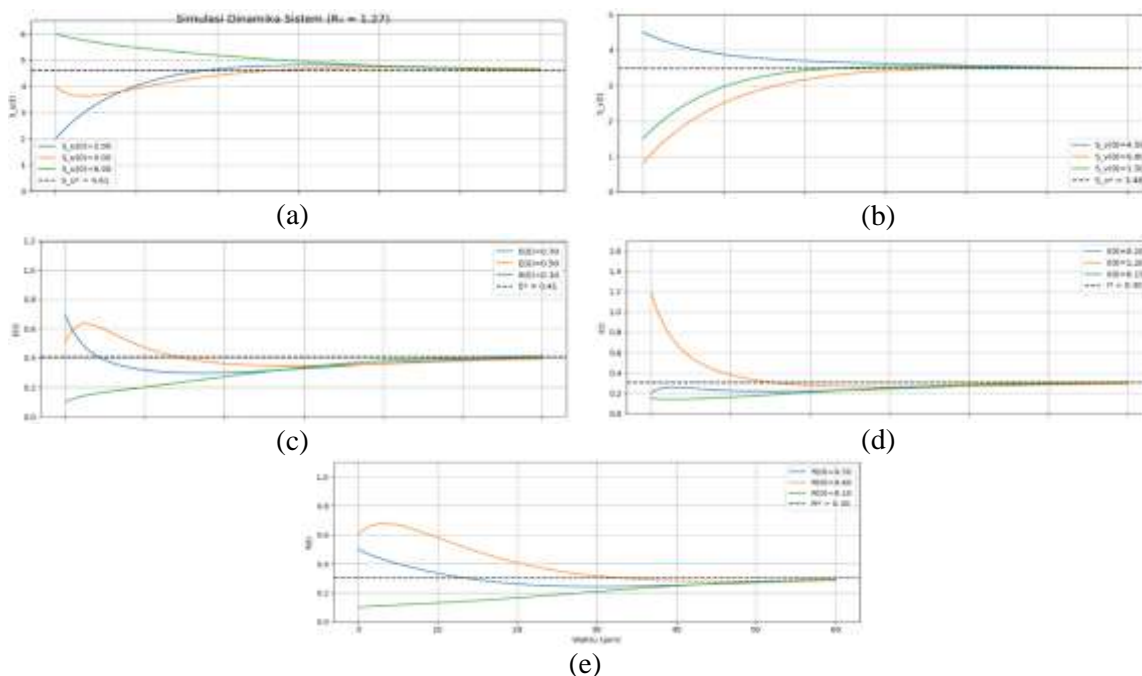
$$\mathcal{R}_0 = 1.266$$

Diperoleh $\mathcal{R}_0 > 1$. Titik ekuilibrium yang diperoleh dari parameter tersebut adalah $E_1 = (4.61, 3.48, 0.41, 0.30, 0.30)$. Dalam simulasi ini digunakan tiga titik awal, yaitu:

- $S_u(0) = 2.00; S_v(0) = 4.50; E(0) = 0.70; I(0) = 0.20; R(0) = 0.50$

- ii. $S_u(0) = 4.00; S_v(0) = 0.80; E(0) = 0.50; I(0) = 1.20; R(0) = 0.60$
- iii. $S_u(0) = 6.00; S_v(0) = 1.50; E(0) = 0.10; I(0) = 0.15; R(0) = 0.10$

Berdasarkan nilai parameter dan nilai awal diatas diperoleh grafik dari masing-masing kelompok terhadap waktu t :



Gambar 3. Hasil Simulasi Numerik saat $\mathcal{R}_0 > 1$

Berdasarkan Gambar 3 hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa saat $\mathcal{R}_0 > 1$ sistem akan bergerak menuju titik ekuilibrium endemik penyakit E_1 . Ini menunjukkan bahwa setiap kasus infeksi rata-rata menularkan penyakit ke lebih dari satu individu. Titik ekuilibrium endemik yang stabil ini menunjukkan bahwa setelah gangguan kecil (misal ada satu atau beberapa individu baru terinfeksi atau sembuh), sistem akan kembali ke keadaan endemi. Dengan kata lain, penyakit akan terus mewabah dalam populasi.

3.3 Interpretasi Model Matematika Penyebaran Penyakit Cacar Air

Berdasarkan hasil analisis yang telah dilakukan dapat dilihat bahwa faktor yang mempengaruhi penyebaran penyakit cacar bisa diketahui melalui nilai \mathcal{R}_0 pada persamaan (6). Secara biologis, nilai \mathcal{R}_0 menyatakan rata-rata jumlah infeksi baru yang dihasilkan oleh satu atau beberapa orang terinfeksi yang berada di populasi. Pada kondisi ini tentu semakin besar nilai \mathcal{R}_0 maka semakin besar pula tingkat penularan yang dihasilkan.

Dari ekspresi \mathcal{R}_0 pada persamaan (6) dapat diuraikan bahwa penyakit akan hilang dari populasi (yakni $\mathcal{R}_0 < 1$) apabila faktor-faktor yang mempercepat “keluarnya” individu dari kelas infeksi seperti angka kematian alami (μ), angka kematian akibat cacar air (δ), dan laju pemulihan (ν) semakin besar.

Sebaliknya, jika laju kelahiran (Λ), laju transisi dari terpapar ke infeksi (ε), laju infeksi pada kelompok tanpa vaksin (β_u) atau divaksin (β_v), serta proporsi transmisi dini (q) meningkat, atau cakupan vaksinasi (c) sangat rendah, maka $\mathcal{R}_0 > 1$ dan penyakit akan terus menyebar. Oleh karena itu, peningkatan cakupan dan efektivitas vaksinasi, pengurangan laju kontak (menurunkan β_u dan β_v), serta percepatan pemulihan pasien merupakan strategi utama untuk menurunkan \mathcal{R}_0 di bawah ambang kritis.

4. KESIMPULAN

Dari pembahasan yang telah dilakukan, diperoleh model matematika penyebaran penyakit cacar air dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinear. Model ini memiliki dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit. Berdasarkan hasil simulasi, nilai bilangan reproduksi dasar \mathcal{R}_0 menjadi faktor kunci dalam menentukan dinamika dari model penyebaran penyakit cacar air. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa bilangan reproduksi dasar berperan penting dalam menentukan arah dan dinamika transisi sistem. Pada titik $E_0 = \left(\frac{(1-c)\Lambda}{\mu}, \frac{c\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ akan stabil asimtotik jika $\mathcal{R}_0 < 1$ sebaliknya tidak akan stabil jika $\mathcal{R}_0 > 1$ dan titik $E_1 = (S_u^*, S_v^*, E^*, I^*, R^*)$ hanya akan eksis dan stabil asimtotik jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

REFERENSI

- [1] F. Udin and S. P. Ritauw, "Sosialisasi Pencegahan Cacar Air Pada Anak-anak di Kelurahan Hative Kecil Aster Melalui Video Pembelajaran," *Pattimura Mengabdi: Jurnal Pengabdian Kepada Masyarakat*, vol. 1, no. 4, pp. 204–208, Jan. 2024, doi: 10.30598/pattimura-mengabdi.1.4.204-208.
- [2] P. A. Siregar, N. A. Azwa, A. D. Mrp, and S. Maghfirah, "Epidemiologi Penyakit Menular Cacar Air," *JK: Jurnal Kesehatan*, vol. 1, no. 1, pp. 10–24, 2023.
- [3] L. M. Irham *et al.*, "Investigation of susceptibility genes for chickenpox disease across multiple continents," *Biochem Biophys Rep*, vol. 33, Mar. 2023, doi: 10.1016/j.bbrep.2022.101419.
- [4] Mayo Clinic, "Chickenpox - Diagnosis and Treatment," *www.mayoclinic.org*, 2023, Accessed: Feb. 06, 2025. [Online]. Available: <https://www.mayoclinic.org/diseases-conditions/chickenpox/diagnosis-treatment/drc-20351287>
- [5] R. F. Murzen, "Komplikasi Cacar Air," *alodokter*, 2025, Accessed: Jul. 01, 2025. [Online]. Available: <https://www.alodokter.com/cacar-air/komplikasi#:~:text=Risiko%20penderita%20cacar%20air%20terkena%20dehidrasi%20akan,guna%20membantu%20menu runkan%20suhu%20tubuh%20saat%20demam.>
- [6] H. S. Pawestri, "Bukan Cuma Lewat Kulit, Ini 4 Cara Penularan Cacar Air," *hellosehat.com*. Accessed: Feb. 08, 2025. [Online]. Available: https://hellosehat.com/parenting/kesehatan-anak/infeksi-anak/cara-penularan-cacar-air/?utm_source=chatgpt.com
- [7] R. Nuraini, "Agar Cacar Air Tak Mewabah," *Indonesia.go.id*. Accessed: Feb. 06, 2025. [Online]. Available: <https://indonesia.go.id/kategori/editorial/8742/agar-cacar-air-tak-mewabah?lang=1>
- [8] J. P. Utami, "Epidemiologi Varicella," *Alomedika.com*. Accessed: Feb. 06, 2025. [Online]. Available: <https://www.alomedika.com/penyakit/penyakit-infeksi/cacar-air/epidemiologi>
- [9] S. A. Jose, R. Raja, J. Dianavinnarasi, D. Baleanu, and A. Jirawattanapanit, "Mathematical modeling of chickenpox in Phuket: Efficacy of precautionary measures and bifurcation analysis," *Biomed Signal Process Control*, vol. 84, Jul. 2023, doi: 10.1016/j.bspc.2023.104714.
- [10] J. Karsai *et al.*, "Modeling the transmission dynamics of varicella in Hungary," *J Math Ind*, vol. 10, no. 1, Dec. 2020, doi: 10.1186/s13362-020-00079-z.
- [11] Musarifa, Hikmah, and Fardinah, "Analisis Model Matematika SEITR pada Penyakit Cacar Air," *JOMTA Journal of Mathematics: Theory and Applications*, vol. 3, no. 2, 2021.
- [12] M. W. Hirsch, Stephen. Smale, and R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Academic Press, 2013.