

# Model Mangsa-Pemangsa dengan Efek Allee dan Kompetisi Intraspesifik pada Pemangsa

Gita Aliya Ramadhan, Riry Sriningsih

Departemen Matematika, Universitas Negeri Padang

## Article Info

### Article history:

Received July 14, 2025

Revised July 19, 2025

Accepted August 8, 2025

### Keywords:

Predator-Prey Model

Allee Effect

Intraspecific Competition

### Kata Kunci:

Model Mangsa-Pemangsa

Efek Allee

Kompetisi Intraspesifik

## ABSTRACT

This study examines the influence of the Allee effect and intraspecific competition on the stability of a predator-prey system using a mathematical modeling approach. The objective is to understand how these two factors affect population dynamics and ecosystem stability. A descriptive method is applied by analyzing the system mathematically based on biological assumptions. The research stages include literature review, formulation of a nonlinear differential model, stability analysis using the Jacobian matrix, and numerical simulations to explore parameter variations. The analysis reveals two equilibrium points: total extinction and coexistence. The total extinction point is unstable, indicating that both populations are unlikely to go extinct naturally. In contrast, the stability of the coexistence point is strongly influenced by the strength of the Allee effect and the level of intraspecific competition. These findings highlight the importance of considering low population density and within-species competition in ecosystem management and species conservation strategies.

## ABSTRAK

Penelitian ini mengkaji pengaruh efek Allee dan kompetisi intraspesifik terhadap kestabilan sistem mangsa-pemangsa melalui pendekatan pemodelan matematika. Tujuannya adalah untuk memahami bagaimana kedua faktor tersebut memengaruhi dinamika populasi dan kestabilan ekosistem. Metode yang digunakan adalah metode deskriptif dengan menganalisis sistem secara matematis berdasarkan asumsi biologis. Tahapan penelitian meliputi studi pustaka, perumusan model diferensial nonlinier, analisis kestabilan menggunakan matriks Jacobian, dan simulasi numerik untuk mengeksplorasi variasi parameter. Hasil analisis menunjukkan dua titik ekuilibrium: kepunahan total dan koeksistensi. Titik kepunahan total bersifat tidak stabil, yang mengindikasikan bahwa kepunahan kedua populasi tidak terjadi secara alami. Sebaliknya, kestabilan titik koeksistensi sangat dipengaruhi oleh kekuatan efek Allee dan tingkat kompetisi intraspesifik. Temuan ini menekankan pentingnya mempertimbangkan kepadatan populasi rendah dan kompetisi dalam spesies dalam pengelolaan ekosistem dan strategi konservasi spesies.

This is an open access article under the [CC BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license.



## Penulis Korespondensi:

Gita Aliya Ramadhan

Departemen Matematika, Universitas Negeri Padang

Email: [gitaaliya2710@gmail.com](mailto:gitaaliya2710@gmail.com)

## 1. PENDAHULUAN

Dalam sebuah ekosistem, interaksi antara mangsa dan pemangsa memegang peranan penting dalam menjaga keseimbangan populasi. Hubungan antara pemangsa dan mangsa memainkan peran penting dalam menentukan stabilitas dan keberlanjutan banyak spesies dalam ekosistem. Matematika memegang peranan penting sebagai sebuah alat yang dapat memodelkan dan menganalisis dinamika kompleks dari sistem mangsa-pemangsa tersebut. Lotka dan Volterra pertama kali mengusulkan dua buah persamaan diferensial yang menggambarkan hubungan antara mangsa dan pemangsa pada tahun 1925 dan 1926 [1], [2], yang selanjutnya lebih dikenal sebagai model mangsa-pemangsa Lotka-Volterra. Namun, model klasik seperti Lotka-Volterra sering kali menyederhanakan realitas ekologi, karena tidak mempertimbangkan faktor-faktor biologis penting seperti efek Allee, yang dalam kenyataannya dapat memengaruhi dinamika populasi secara signifikan.

Penelitian tentang pengaruh efek Allee terhadap kestabilan ekuilibrium dalam model mangsa-pemangsa telah menarik minat yang meningkat di kalangan ahli matematika, ekologi, dan konservasi. Meskipun banyak model teoritis yang melibatkan efek Allee menunjukkan bahwa ekuilibrium koeksistensi menjadi tidak stabil, observasi lapangan justru menunjukkan bahwa sistem mangsa-pemangsa dengan pertumbuhan populasi yang bergantung pada kepadatan rendah masih memungkinkan terjadinya koeksistensi dalam jangka panjang.

Efek Allee didefinisikan sebagai sebuah hubungan positif antara tingkat kebugaran individu dengan kepadatan individu dalam populasi [3]. Populasi dengan kepadatan kecil dapat menghadapi ancaman yang lebih besar terhadap kebugaran dan kelangsungan hidupnya, yang nantinya dapat menurunkan laju pertumbuhan per kapita populasi tersebut [4]. Fenomena ini dapat terjadi baik pada populasi mangsa maupun pemangsa. Sebagai contoh, pemangsa dapat menyebabkan efek Allee pada mangsa dengan menurunkan peluang bertahan hidup tiap individu [5]. Sedangkan pada populasi pemangsa efek Allee bekerja dengan cara menurunkan respons numerik predator terhadap ketersediaan mangsa. Efek ini sering kali berkaitan dengan keberhasilan berburu, reproduksi, dan perlindungan kelompok [6]. Efek Allee terbagi menjadi efek Allee kuat dan efek Allee lemah, tetapi hanya efek Allee kuat yang menunjukkan tingkat pertumbuhan per kapita negatif untuk kepadatan populasi yang cukup rendah [4], [7].

Spesies sosial seperti anjing liar Afrika (*Lycaon Pictus*) memiliki kerentanan tinggi terhadap efek Allee, karena keberhasilan mereka dalam berburu, berkembang biak, dan bertahan hidup sangat bergantung pada keberadaan kelompok dengan ukuran yang memadai [8]. Anjing liar Afrika merupakan spesies karnivora sosial yang hidup berkelompok, umumnya terdiri dari tujuh hingga lebih dari lima belas individu. Mereka biasanya mendiami zona kering dan sabana, namun juga ditemukan di hutan, semak belukar, dan wilayah pegunungan selama tersedia cukup mangsa. Mangsa utama mereka adalah hewan berukuran kecil hingga menengah, seperti gazel [9].

Sebagai pemangsa karnivora sosial yang bergantung pada kerja sama dalam berburu, anjing liar Afrika menunjukkan sensitivitas tinggi terhadap perubahan jumlah populasi. Populasi yang terlalu kecil tidak hanya mengurangi efisiensi berburu, tetapi juga menurunkan keberhasilan reproduksi dan meningkatkan risiko kepunahan. Penurunan ukuran kelompok juga mengakibatkan berkurangnya keuntungan energi per individu karena meningkatnya beban berburu dan menurunnya kemampuan menjaga hasil tangkapan dari gangguan pesaing [8]. Dengan demikian, keberlangsungan hidup dan keberhasilan berburu anjing liar Afrika sangat bergantung pada dinamika sosial dan ukuran kelompok yang stabil. Oleh karena itu, keberhasilan jangka panjang spesies ini sangat bergantung pada dinamika sosial dan kestabilan ukuran kelompok, yang merupakan manifestasi nyata dari efek Allee.

Penelitian sebelumnya oleh Zhou dkk. [6] telah mengembangkan model matematika mangsa-pemangsa yang mengintegrasikan efek Allee dalam populasi pemangsa. Namun, model tersebut cenderung menghasilkan dinamika yang tidak stabil dalam jangka panjang, yang dalam banyak kasus tidak sesuai dengan kondisi biologis sebenarnya. Oleh karena itu, perlu dilakukan modifikasi terhadap model tersebut agar mampu menggambarkan interaksi mangsa-pemangsa dengan lebih realistis. Salah satu modifikasi yang relevan adalah dengan menambahkan unsur kompetisi intraspesifik dalam populasi pemangsa, sebagaimana model mangsa-pemangsa yang dikemukakan

oleh Bodine dan Yust [4] yang mengintegrasikan efek Allee dan kompetisi intraspesifik pada populasi pemangsa.

Kompetisi intraspesifik merupakan salah satu faktor penting yang tidak dapat diabaikan, terutama pada spesies pemangsa yang hidup berkelompok seperti anjing liar Afrika. Kompetisi intraspesifik merupakan interaksi negatif yang terjadi ketika individu-individu dari spesies yang sama bersaing karena jumlah mereka melebihi kemampuan lingkungan untuk mendukung mereka [10]. Kompetisi ini dapat mempengaruhi kelangsungan hidup dan kemampuan spesies untuk bereproduksi [11]. Kompetisi intraspesifik memengaruhi demografi anjing liar dalam beberapa cara yang signifikan. Di dalam kelompok, penekanan reproduksi pada individu subordinat terutama disebabkan oleh persaingan atas sumber daya yang terbatas. Selain itu, anjing liar dari kelompok tetangga sering terlibat dalam perkeltahan agresif, yang terkadang berakhir fatal [12].

Oleh karena itu, artikel ini membahas dan menganalisis model matematika mangsa-pemangsa yang dikembangkan oleh Bodine dan Yust [4], yang mengintegrasikan dua faktor biologis penting: efek Allee dan kompetisi intraspesifik dalam populasi pemangsa. Permasalahan utama yang dikaji adalah bagaimana pengaruh kedua faktor tersebut terhadap kestabilan titik-titik ekuilibrium dan kondisi koeksistensi jangka panjang dalam sistem mangsa-pemangsa. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengevaluasi dinamika populasi melalui pendekatan matematis serta menganalisis kestabilan ekuilibrium yang dihasilkan oleh model tersebut. Studi ini melanjutkan dan melengkapi penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Zhou dkk. [6], yang hanya mempertimbangkan efek Allee tanpa memperhitungkan kompetisi intraspesifik. Dengan menganalisis model yang lebih kompleks ini, diharapkan diperoleh pemahaman yang lebih mendalam tentang faktor-faktor yang memengaruhi kestabilan ekosistem dan strategi konservasi spesies.

## **2. METODE**

Penelitian ini merupakan penelitian dasar. Penelitian dasar bertujuan untuk mengembangkan teori dan tidak memperhatikan kegunaan yang langsung bersifat praktis [13]. Penelitian ini berfokus pada pengembangan ide, gagasan, atau teori yang dapat menjadi landasan ilmiah untuk penelitian lanjutan. Hasil dari penelitian dasar ini diharapkan mampu memperluas pemahaman tentang konsep yang diteliti dan memberikan kontribusi signifikan terhadap pengembangan ilmu pengetahuan. Adapun langkah-langkah kerja yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi masalah yang akan dibahas dari model mangsa-pemangsa dengan efek Allee dan kompetisi intraspesifik pada pemangsa.
2. Mengkaji dan mempelajari buku, jurnal, dan sumber terkait.
3. Merumuskan asumsi serta menetapkan variabel dan parameter yang dapat membantu pembentukan dan analisis model.
4. Membangun dan membentuk model.
5. Melakukan analisis titik ekuilibrium menggunakan matriks Jacobian.
6. Melakukan simulasi numerik untuk menggambarkan dinamika sistem dan potret fase dengan bantuan perangkat lunak Maple.
7. Menginterpretasi dari hasil analisis dan simulasi model.
8. Menarik kesimpulan.

## **3. HASIL DAN PEMBAHASAN**

### **3.1. Model**

Dalam membangun sebuah model matematika, diperlukan asumsi-asumsi yang rasional, sehingga ruang lingkup model tetap sesuai dengan fokus permasalahan yang akan diteliti. Adapun dalam memodelkan interaksi mangsa-pemangsa dengan efek Allee dan kompetisi intraspesifik pada populasi pemangsa digunakan beberapa asumsi berikut:

1. Populasi mangsa mengalami kelahiran alami tanpa adanya interaksi dengan pemangsa.
2. Mangsa berkurang karena interaksi dengan pemangsa, di mana jumlah mangsa yang dimakan bergantung pada frekuensi pertemuan antara keduanya.

3. Pemangsa mengalami kematian alami jika tidak mendapatkan cukup mangsa sebagai sumber makanan.
4. Pertumbuhan populasi pemangsa terjadi jika ada interaksi dengan mangsa, namun tidak semata-mata bergantung pada keberadaan mangsa, melainkan juga dipengaruhi oleh dua mekanisme, yaitu efek Allee dan kompetisi intraspesifik.

Serta pada model ini terdapat dua variabel yang digunakan, yaitu variabel  $x$  yang menyatakan populasi mangsa dan variabel  $y$  yang menyatakan populasi pemangsa. Adapun parameter yang digunakan dalam model ini adalah:

$r_1$ : Laju kelahiran populasi mangsa

$r_2$ : Laju kematian alami pemangsa

$r_3$ : Laju penurunan populasi mangsa akibat pemangsaan

$r_4$ : Efisiensi konversi mangsa menjadi pemangsa

$\eta$ : Intensitas kompetisi intraspesifik

$\theta$ : Ambang batas Allee

dengan  $r_1, r_2, r_3, r_4, \eta, \theta > 0$ .

Berdasarkan asumsi-asumsi yang telah diberikan, dapat dibentuk sebuah model matematika berupa sistem persamaan diferensial:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= r_1x - r_3xy \\ \frac{dy}{dt} &= -r_2y + r_4xy \left(1 - \frac{y}{\eta x}\right) \left(\frac{y}{y + \theta}\right)\end{aligned}\quad (1)$$

### 3.2. Analisis Kestabilan

#### 3.2.1. Titik Ekuilibrium

Analisis terhadap model (1) dapat diawali dengan mencari titik ekuilibrium, yaitu kondisi saat laju perubahan populasi mangsa dan pemangsa sama dengan nol, yaitu titik-titik yang memenuhi  $\frac{dx}{dt}$  dan  $\frac{dy}{dt} = 0$ . Berdasarkan model (1) diperoleh persamaan-persamaan berikut:

$$r_1x - r_3xy = 0 \quad (2)$$

$$-r_2y + r_4xy \left(1 - \frac{y}{\eta x}\right) \left(\frac{y}{y + \theta}\right) = 0 \quad (3)$$

Persamaan (2) dapat ditulis ulang sebagai:

$$x(r_1 - r_3y) = 0$$

Dari sini diperoleh dua kemungkinan:

$$x = 0 \text{ atau } y = \frac{r_1}{r_3}$$

Persamaan (3) dapat ditulis ulang menjadi:

$$y \left( -r_2 + r_4x \left(1 - \frac{y}{\eta x}\right) \left(\frac{y}{y + \theta}\right) \right) = 0$$

Dari sini diperoleh dua kemungkinan:

$y = 0$ , yang menghasilkan titik ekuilibrium:

$$E_0 = (0, 0)$$

atau

$$-r_2 + r_4 x \left(1 - \frac{y}{\eta x}\right) \left(\frac{y}{y + \theta}\right) = 0 \quad (4)$$

Persamaan (4) disederhanakan menjadi:

$$-r_2 + r_4 x \left(1 - \frac{y}{\eta x}\right) \left(\frac{y}{y + \theta}\right) = 0$$

$$-r_2 + r_4 x \left(1 - \frac{y}{\eta x}\right) \left(\frac{y}{y + \theta}\right) = 0$$

$$-r_2 + \frac{r_4 xy}{y + \theta} - \frac{r_4 y^2}{\eta y + \eta \theta} = 0$$

$$-r_2 + r_4 x \left(1 - \frac{y}{\eta x}\right) \left(\frac{y}{y + \theta}\right) = 0$$

$$\frac{-r_2 \eta y - r_2 \eta \theta + r_4 \eta xy - r_4 y^2}{\eta y + \eta \theta} = 0$$

Penyederhanaan lebih lanjut menghasilkan persamaan kuadrat terhadap y:

$$r_4 y^2 + (r_2 \eta - r_4 \eta x) y + r_2 \eta \theta = 0 \quad (5)$$

Jika  $x = 0$ , maka persamaan (5) menjadi:

$$y_{1,2} = \frac{-(r_2 \eta - r_4 \eta(0)) \pm \sqrt{r_2^2 \eta^2 - 2r_2 r_4 \eta^2(0) + r_4^2 \eta^2(0) - 4r_2 r_4 \eta \theta}}{2r_4}$$

$$y_{1,2} = \frac{-(r_2 \eta) \pm \sqrt{r_2^2 \eta^2 - 4r_2 r_4 \eta \theta}}{2r_4}$$

$$y_1 = \frac{-(r_2 \eta) + \sqrt{r_2^2 \eta^2 - 4r_2 r_4 \eta \theta}}{2r_4} \text{ atau } y_1 = \frac{-(r_2 \eta) - \sqrt{r_2^2 \eta^2 - 4r_2 r_4 \eta \theta}}{2r_4}$$

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium

$$E_1 = \left( 0, \frac{-(r_2 \eta) + \sqrt{r_2^2 \eta^2 - 4r_2 r_4 \eta \theta}}{2r_4} \right)$$

$$E_2 = \left( 0, \frac{-(r_2 \eta) - \sqrt{r_2^2 \eta^2 - 4r_2 r_4 \eta \theta}}{2r_4} \right)$$

Namun, untuk titik  $E_1$  dan  $E_2$ , misalkan  $\Delta = r_2^2 \eta^2 - 4\theta \eta r_2 r_4$ . Ketika  $\Delta < 0$ , maka  $y^* \neq \mathbb{R}$ . Selanjutnya dikarenakan seluruh parameter bernilai positif, jika  $\Delta \geq 0$ , maka  $y^* < 0$ , yang berarti populasi pemangsa menjadi negatif. Oleh sebab itu, berapapun nilai  $\Delta$ , baik titik  $E_1$  maupun titik  $E_2$  bukanlah titik yang relevan atau valid untuk model ini.

Selanjutnya jika  $y = \frac{r_1}{r_3}$ , maka substitusi ke dalam persamaan (5) akan menghasilkan nilai  $x$  sebagai berikut:

$$-r_2 \eta \left( \frac{r_1}{r_3} \right) - r_2 \eta \theta + r_4 \eta x \left( \frac{r_1}{r_3} \right) - r_4 \left( \frac{r_1}{r_3} \right)^2 = 0$$

$$r_4 \eta x \left( \frac{r_1}{r_3} \right) = r_4 \left( \frac{r_1}{r_3} \right)^2 + r_2 \eta \left( \frac{r_1}{r_3} \right) + r_2 \eta \theta$$

$$\left( \frac{r_1 r_4 \eta}{r_3} \right) x = \frac{r_1^2 r_4}{r_3^2} + \frac{r_1 r_2 \eta}{r_3} + r_2 \eta \theta$$

$$x = \frac{r_1}{r_3 \eta} + \frac{r_1 r_2}{r_1 r_4} + \frac{r_2 r_3 \theta}{r_1 r_4}$$

$$x = \frac{r_2}{r_4} \frac{r_1 + r_3 \theta}{r_1} + \frac{r_1}{r_3 \eta}$$

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium:

$$E_3 = \left( \frac{r_2}{r_4} \frac{r_1 + r_3 \theta}{r_1} + \frac{r_1}{r_3 \eta}, \frac{r_1}{r_3} \right)$$

Dari hasil perhitungan di atas, diperoleh dua titik ekuilibrium, yaitu:

1.  $E_0 = (0,0)$
2.  $E_3 = \left( \frac{r_2}{r_4} \frac{r_1 + r_3 \theta}{r_1} + \frac{r_1}{r_3 \eta}, \frac{r_1}{r_3} \right)$

### 3.2.2. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Kestabilan lokal titik ekuilibrium dapat ditentukan melalui proses linearisasi disekitar titik tersebut, yang dapat dilakukan dengan menggunakan matriks Jacobian. Adapun matriks Jacobian dari sistem (1) diperoleh sebagai berikut.

$$J = \begin{bmatrix} -r_1 + r_3 y & -r_3 x \\ \frac{r_4 y^2}{y + \theta} & -\frac{2\eta r_4 \theta x y - \eta r_4 x y^2 + \eta r_2 \theta^2 + 2\eta r_2 \theta y + \eta r_2 y^2 + 3r_4 \theta y^2 + 2r_4 y^3}{\eta(y + \theta)^2} \end{bmatrix}$$

Dalam rangka menganalisis kestabilan titik ekuilibrium, pendekatan *trace-determinant* digunakan sebagai acuan, merujuk pada teori yang disampaikan oleh Hirsch dkk. [14]. Kriteria tersebut dirangkum dalam Tabel 1 sebagai acuan analisis.

Tabel 1. Syarat Kestabilan Titik Ekuilibrium

No	$Tr(A)$	$\det(A)$	$Tr(A)^2 - 4 \det(A)$	Jenis	Kestabilan
1	$< 0$	$> 0$		<i>Spiral sink</i>	Stabil Asimtotik
2	$> 0$	$> 0$	$< 0$	<i>Spiral source</i>	Tidak stabil
3	$= 0$	$> 0$		<i>Center</i>	Stabil
4	$= 0$	$< 0$		<i>Saddle</i>	Tidak stabil
5	$> 0$	$< 0$		<i>Saddle</i>	Tidak Stabil
6	$< 0$	$< 0$	$> 0$	<i>Saddle</i>	Tidak Stabil
7	$< 0$	$> 0$		<i>Sink</i>	Stabil Asimtotik
8	$> 0$	$> 0$		<i>Source</i>	Tidak stabil
9	$> 0$	$= 0$		<i>Source</i>	Tidak stabil
10	$> 0$	$> 0$	$= 0$	<i>Source</i>	Tidak stabil
11	$< 0$	$> 0$	$= 0$	<i>Sink</i>	Stabil Asimtotik

**Kestabilan Titik  $E_0$** 

Matriks Jacobian untuk titik ekuilibrium  $E_0 = (0,0)$  adalah

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & -r_2 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks Jacobian tersebut didapatkan  $Tr(J(E_0)) = r_1 - r_2$  dan  $\det(J(E_0)) = -r_1 r_2$ . Dikarenakan  $r_1 > 0$  dan  $r_2 > 0$ , maka  $-r_1 r_2 < 0$ , yang berarti bahwa  $\det(J(E_0)) < 0$ . Berdasarkan syarat kestabilan titik ekuilibrium pada Tabel 1, ketika  $\det(J) < 0$ , berapapun nilai  $Tr(J)$  yang didapat, titik  $E_2$  disebut *saddle point*. Artinya, titik ini tidak stabil karena sistem bisa bergerak mendekati titik tersebut dari satu arah, tetapi akan menjauhinya dari arah lain. Sehingga, populasi tidak akan bertahan di titik ini dalam jangka panjang.

**Kestabilan Titik  $E_3$** 

Matriks Jacobian untuk titik ekuilibrium  $E_3$  adalah

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\theta \eta r_2 r_3^2 + \eta r_1 r_2 r_3 + r_1^2 r_4}{\eta r_1 r_4} \\ \frac{r_1^2 r_4}{r_1 r_3 + \theta r_3^2} & \frac{\theta \eta r_2 r_3^2 - r_1^2 r_4}{r_1 r_3 \eta + \theta r_3^2 \eta} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks Jacobian tersebut didapatkan *trace* dan *determinant* sebagai berikut.

$$Tr(J(E_3)) = \frac{\theta r_2 r_3^2 \eta - r_1^2 r_4}{r_1 r_3 \eta + \theta r_3^2 \eta}$$

$$\det(J(E_3)) = \frac{\theta r_1 r_2 r_3^2 \eta + r_1^2 r_2 r_3 \eta + r_1^3 r_4}{r_1 r_3 \eta + \theta r_3^2 \eta}$$

Berdasarkan kriteria kestabilan pada Tabel 1, diketahui bahwa:

1. Jika nilai  $\det(J(E_3))$  kurang dari nol, maka titik  $E_3$  merupakan *saddle point*, yang selalu tidak stabil.
2. Jika nilai  $\det(J(E_3))$  lebih dari nol, maka:
  - a. Jika  $Tr(J(E_3)) < 0$ , titik ekuilibrium bersifat stabil asimtotik.

- b. Jika  $Tr(J(E_3)) = 0$ , titik ekuilibrium merupakan *center*.  
 c. Jika  $Tr(J(E_3)) > 0$ , titik ekuilibrium bersidat tidak stabil.

Dikarenakan semua parameter pada model bernilai positif, maka  $\det(J(E_3))$  akan selalu positif. Artinya, kestabilan titik  $E_3$  dapat berupa stabil asimtotik atau tidak stabil tergantung pada nilai  $Tr(J(E_3))$

$$Tr(J(E_3)) = 0$$

$$\frac{\theta r_2 r_3^2 \eta - r_1^2 r_4}{r_1 r_3 \eta + \theta r_3^2 \eta} = 0$$

$$\theta r_2 r_3^2 \eta - r_1^2 r_4 = 0$$

$$\theta = \frac{r_1^2 r_4}{r_2 r_3^2 \eta}$$

Persamaan diatas menyatakan nilai kritis dari parameter  $\theta$  terhadap parameter  $\eta$ , yang memisahkan wilayah kestabilan dan ketidakstabilan sistem. Dari sini diperoleh fungsi batas kritis untuk  $E_3$  adalah:

$$\theta_c(\eta) = \frac{r_1^2 r_4}{r_2 r_3^2 \eta}$$

Dimana  $\theta_c(\eta)$  menunjukkan nilai  $\theta$  ketika  $E_3$  menjadi *center*. Dengan demikian, didapatkan kestabilan  $E_3$  sebagai berikut:

1. Jika  $\theta < \theta_c(\eta)$ , maka  $E_3$  bersifat stabil asimtotik. Hal ini berarti bahwa sistem akan selalu kembali dan mendekati  $E_3$  seiring waktu, meskipun mengalami gangguan kecil. Ini menandakan bahwa  $E_3$  adalah kondisi jangka panjang yang stabil secara dinamis.
2. Jika  $\theta = \theta_c(\eta)$ , maka  $E_3$  merupakan *center*. Dalam kondisi ini, sistem berada pada ambang kestabilan. Sistem akan terus bergerak mengelilingi  $E_3$ , tidak mendekat dan tidak menjauh. Sistem tetap stabil, tapi tidak akan pernah benar-benar sampai di  $E_3$ .
3. Jika  $\theta > \theta_c(\eta)$ , maka  $E_3$  menjadi tidak stabil. Hal ini berarti bahwa gangguan kecil di sekitar  $E_3$  akan menyebabkan solusi menjauh dari  $E_3$  seiring waktu.  $E_3$  tidak lagi menjadi kondisi jangka panjang sistem.

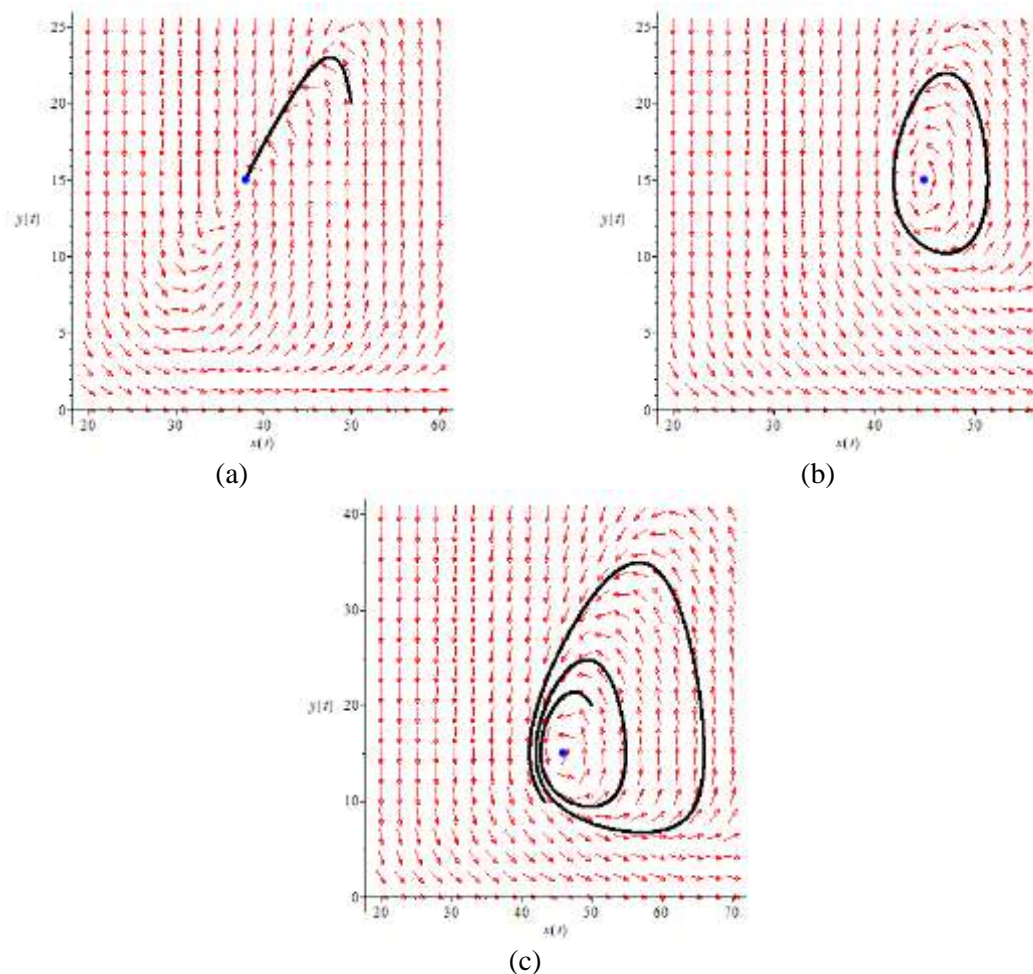
### 3.3. Simulasi Numerik

Untuk melihat bagaimana efek Allee dan kompetisi intraspesifik mempengaruhi dinamika interaksi antara mangsa dan pemangsa, akan dilakukan simulasi numerik pada model yang telah di bentuk. Simulasi dilakukan dengan cara memfariasikan parameter  $\theta$  dan  $\eta$  yang merepresentasikan pengaruh efek Allee dan kompetisi intraspesifik. Adapun parameter-parameter lainnya disajikan pada Tabel 2 berikut.

Tabel 1. Nilai Parameter Simulasi

Parameter	Nilai
$r_1$	0,03
$r_2$	0,3
$r_3$	0,002
$r_4$	0,02





Gambar 1. Trayektori di Sekitar Titik Ekuilibrium Koeksistensi pada (a)  $\eta = 0,75$  ,  $\theta = 3$ , (b)  $\eta = 1$ ,  $\theta = 14$ , dan (c)  $\eta = 1$ ,  $\theta = 16$

Gambar 1(a) menunjukkan potret fase dari sistem mangsa-pemangsa dengan parameter  $\eta = 0.75$  dan  $\theta = 3$ . Terlihat bahwa untuk kondisi awal  $x(0) = 50$  dan  $y(0) = 20$ , lintasan sistem bergerak menuju titik ekuilibrium  $E_3$  secara langsung dan tidak mengelilinginya. Hal ini menunjukkan bahwa sistem berada dalam kondisi *node* stabil. Arah panah medan vektor juga menunjukkan bahwa solusi dari berbagai titik awal di sekitar  $E_3$  semuanya bergerak menuju titik tersebut. Perilaku ini sesuai dengan kriteria kestabilan ketika  $\theta = 3$  lebih kecil dari ambang kritis  $\theta_c(\eta) = 20$ , maka titik ekuilibrium  $E_3$  bersifat stabil asimtotik. Artinya, sistem akan selalu kembali dan mendekati  $E_3$  seiring waktu meskipun mengalami gangguan kecil. Dengan demikian,  $E_3$  merupakan kondisi jangka panjang yang stabil secara asimtotik, dan sistem akan kembali ke titik ini meskipun mengalami gangguan kecil di sekitarnya.

Gambar 1(b) menggambarkan potret fase sistem dengan parameter  $\eta = 1$  dan  $\theta = 14$ . Terlihat bahwa lintasan tidak lagi mendekati titik ekuilibrium  $E_3$ , melainkan membentuk pola tertutup yang mengelilinginya secara terus-menerus. Arah panah medan vektor memperkuat indikasi ini dengan menunjukkan bahwa solusi dari berbagai kondisi awal di sekitar  $E_3$  tidak konvergen ke titik tersebut, melainkan terus berputar dalam orbit tertutup. Perilaku ini sesuai dengan kriteria kestabilan ketika  $\theta = \theta_c(\eta)$ , di mana titik ekuilibrium  $E_3$  berada pada kondisi *center*. Dalam situasi ini, sistem bersifat stabil netral, yaitu stabil

terhadap gangguan kecil tetapi tidak asimtotik atau solusi tidak menuju atau menjauh dari  $E_3$  melainkan berosilasi di sekitarnya tanpa peredaman.

Gambar 1(c) menggambarkan potret fase sistem dengan parameter  $\eta = 1$  dan  $\theta = 16$ . Terlihat bahwa lintasan bergerak menuju titik ekuilibrium  $E_3$  secara spiral. Hal ini menunjukkan bahwa sistem berada dalam kondisi fokus tak stabil. Arah panah medan vektor memperkuat indikasi ini dengan menunjukkan bahwa solusi dari berbagai kondisi awal di sekitar  $E_3$  tidak konvergen ke titik tersebut, melainkan terus berputar menjauhi titik  $E_3$ . Perilaku ini sesuai dengan kriteria kestabilan  $\theta > \theta_c(\eta)$ , di mana titik ekuilibrium  $E_3$  bersifat tak stabil. Dalam kondisi ini, sistem sangat sensitif terhadap gangguan kecil, sedikit penyimpangan dari ekuilibrium akan menyebabkan dinamika sistem bergerak keluar dari titik tersebut, menunjukkan bahwa  $E_3$  bukan merupakan kondisi jangka panjang yang dapat dipertahankan secara alami oleh sistem.

### 3.4. Interpretasi

Berdasarkan analisis titik ekuilibrium yang telah dilakukan, terlihat bahwa efek Allee dan kompetisi intraspesifik memiliki pengaruh yang signifikan terhadap dinamika interaksi antara mangsa dan pemangsa. Pengaruh tersebut dapat dilihat pada persamaan ambang batas kestabilan yang dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\theta_c(\eta) = \frac{r_1^2 r_4}{r_2 r_3^2 \eta}$$

Rumus diatas menunjukkan bahwa kompetisi intraspesifik yang digambarkan oleh parameter  $\eta$ , memiliki hubungan terbalik terhadap  $\theta_c(\eta)$ . Semakin kecil nilai  $\eta$  (kompetisi intraspesifik melemah), maka nilai ambang semakin besar. Artinya, sistem memiliki toleransi lebih tinggi terhadap efek Allee sebelum menjadi tidak stabil. Sebaliknya, jika kompetisi intraspesifik meningkat (nilai  $\eta$  besar), maka ambang  $\theta_c(\eta)$  mengecil, dan sistem menjadi lebih rentan terhadap gangguan akibat efek Allee. Dengan demikian untuk mempertahankan kestabilan, jika efek Allee ( $\theta$ ) tinggi, maka diperlukan nilai  $\eta$  yang relatif kecil. Sebaliknya, apabila kompetisi intraspesifik cukup besar, maka efek Allee harus rendah agar sistem tetap stabil. Kestabilan sistem dapat tercapai apabila nilai  $\theta$  dan  $\eta$  keduanya berada pada kisaran yang cukup rendah.

Efek Allee, yang diwakili oleh parameter  $\theta$ , menunjukkan bahwa populasi pemangsa memiliki ambang kepadatan minimum agar bisa bertahan hidup. Saat  $\theta < \theta_c(\eta)$ , titik koeksistensi stabil, artinya populasi mangsa-pemangsa akan menuju keseimbangan meskipun terjadi gangguan kecil. Hal ini secara biologis berarti bahwa populasi mangsa dan pemangsa mampu saling mempertahankan eksistensinya dalam jangka panjang. Sebaliknya, jika  $\theta > \theta_c(\eta)$ , titik koeksistensi menjadi tak stabil. Dalam konteks biologis, kestabilan ini berarti bahwa jika populasi pemangsa turun terlalu rendah, maka populasi mangsa-pemangsa tidak dapat Kembali ke keseimbangan, dan populasi pemangsa akan punah, yang selanjutnya diikuti oleh ledakan populasi mangsa karena tidak adanya pemangsaan, dimana kondisi seperti ini dapat menyebabkan ketidakseimbangan ekosistem. Oleh karena itu, agar keseimbangan populasi memungkinkan untuk terjadi, diperlukan kondisi dengan efek Allee yang tidak terlalu kuat dan kompetisi intraspesifik dalam pemangsa yang tidak terlalu intens.

Pada penelitian sebelumnya oleh Zhou dkk [6], penambahan faktor efek Allee pada respon numerik pemangsa menyebabkan munculnya osilasi dengan amplitudo yang terus meningkat pada populasi mangsa dan pemangsa, yang pada akhirnya menghasilkan titik ekuilibrium bertipe fokus tak stabil. Sebaliknya pada model ini, penambahan faktor intraspesifik pada respon numerik pemangsa, dalam beberapa kasus mampu untuk mengurangi potensi pertumbuhan tak terbatas akibat efek Allee. Hal ini menunjukkan bahwa kompetisi intraspesifik berperan sebagai faktor pengendali dalam dinamika sistem, yang berpotensi menekan efek destabilisasi akibat pengaruh efek Allee dan memungkinkan sistem mencapai keadaan ekuilibrium yang lebih seimbang.

#### 4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah disajikan, didapatkan model mangsa-pemangsa dengan efek Allee dan kompetisi intraspesifik pada pemangsa dalam bentuk sebuah sistem persamaan diferensial nonlinear. Dari hasil analisis, didapatkan dua titik ekuilibrium, yaitu titik kepunahan total dan titik koeksistensi. Simulasi numerik menunjukkan bahwa efek Allee dan kompetisi intraspesifik merupakan faktor yang sangat berpengaruh terhadap kestabilan sistem. Hasil ini menegaskan bahwa keseimbangan antara kekuatan efek Allee dan intensitas kompetisi intraspesifik sangat menentukan kemungkinan terjadinya koeksistensi populasi dalam jangka panjang.

Dalam konteks ekosistem alami, hal ini berarti bahwa kestabilan populasi tidak hanya ditentukan oleh ketersediaan sumber daya atau tekanan lingkungan eksternal, tetapi juga oleh interaksi biologis internal seperti kepadatan populasi dan kompetisi sesama individu dalam satu spesies. Pemahaman ini dapat membantu merancang strategi konservasi yang lebih tepat sasaran, misalnya dengan menjaga kepadatan populasi agar tidak jatuh di bawah ambang kritis, atau mengurangi tekanan kompetitif melalui pengelolaan ruang hidup dan sumber daya. Selain itu, keseimbangan antara efek Allee dan kompetisi intraspesifik dapat dijadikan indikator untuk memantau kondisi ekosistem serta potensi risiko kepunahan pada spesies tertentu, sehingga intervensi ekologis dapat dilakukan secara lebih dini dan efektif.

Namun, model ini masih terbatas pada pembahasan kestabilan lokal dan dalam struktur yang relatif sederhana. Untuk itu, penelitian selanjutnya disarankan untuk melakukan analisis sensitivitas dan bifurkasi terhadap parameter efek Allee ( $\theta$ ) dan kompetisi intraspesifik ( $\eta$ ). Mengingat bahwa kestabilan sistem sangat sensitif terhadap perubahan nilai kedua parameter tersebut, analisis lebih lanjut akan membantu memahami bagaimana fluktuasi kecil dalam kondisi lingkungan atau interaksi spesies dapat memicu ketidakstabilan populasi.

#### REFERENSI

- [1] A. J. Lotka, *Elements of physical biology*. Williams & Wilkins, 1925.
- [2] V. Volterra, "Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together," *ICES Journal of Marine Science*, vol. 3, no. 1, hlm. 3–51, 1928.
- [3] P. A. Stephens, W. J. Sutherland, dan R. P. Freckleton, "Nordic Society Oikos What Is the Allee Effect?," 1999.
- [4] E. N. Bodine dan A. E. Yust, "Predator–prey dynamics with intraspecific competition and an Allee effect in the predator population," *Lett Biomath*, vol. 4, no. 1, hlm. 23–38, Jan 2017, doi: 10.1080/23737867.2017.1282843.
- [5] J. C. Gascoigne dan R. N. Lipcius, "Allee effects driven by predation," Oktober 2004. doi: 10.1111/j.0021-8901.2004.00944.x.
- [6] S. R. Zhou, Y. F. Liu, dan G. Wang, "The stability of predator–prey systems subject to the Allee effects," *Theor Popul Biol*, vol. 67, no. 1, hlm. 23–31, Feb 2005, doi: 10.1016/J.TPB.2004.06.007.
- [7] D. Sen, S. Ghorai, M. Banerjee, dan A. Morozov, "Bifurcation analysis of the predator–prey model with the Allee effect in the predator," *J Math Biol*, vol. 84, no. 1–2, Jan 2022, doi: 10.1007/s00285-021-01707-x.
- [8] M. Gusset dan D. W. Macdonald, "Group size effects in cooperatively breeding African wild dogs," *Anim Behav*, vol. 79, no. 2, hlm. 425–428, Feb 2010, doi: 10.1016/j.anbehav.2009.11.021.
- [9] African Wildlife Foundation, "African wild dog." Diakses: 16 April 2025. [Daring]. Tersedia pada: <https://www.awf.org/wildlife-conservation/african-wild-dog>
- [10] D. C. M. Ed., "Intraspecific competition." Diakses: 16 April 2025. [Daring]. Tersedia pada: <https://www.ebsco.com/research-starters/biology/intraspecific-competition>
- [11] F. Beaudry, "What Is Intraspecific Competition?" Diakses: 1 Juni 2025. [Daring]. Tersedia pada: <https://www.treehugger.com/intraspecific-competition-4126675>
- [12] S. Creel dan N. M. Creel, "Six ecological factors that may limit African wild dogs, *Lycaon pictus*," *Anim Conserv*, vol. 1, no. 1, hlm. 1–9, 1998, doi: DOI: 10.1111/j.1469-1795.1998.tb00220.x.
- [13] Sugiyono, *Metode Penelitian Kuantitatif, Kualitatif, dan R&D*. Bandung, 2013.
- [14] M. W. . Hirsch, Stephen. Smale, dan R. L. . Devaney, *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic Press, 2013.